

УДК 676.056.521.1

ЖУЧЕНКО А. И., д.т.н., проф.; ЧЕРЁПКИН Е. С., асс.  
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГРЕВА БУМАЖНОГО ПОЛОТНА В СУШИЛЬНОЙ ЧАСТИ БУМАГОДЕЛАТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ

*Рассмотрены вопросы тепло- и массопереноса на первом этапе сушки бумажного полотна, в частности тепло- и массообмен между сушильным цилиндром и бумажным полотном, окружающей средой и бумажным полотном, а также перенос теплоты и влаги в материале. Проанализирована физика процессов, получены уравнения для расчета температуры и влажности крайнего и центрального слоя бумаги при прохождении через сушильный цилиндр и на участке свободного хода.*

**Ключевые слова:** бумагоделательная машина, математическая модель, сушильная часть, первый этап сушки, температура, влажность.

© Жученко А. И., Черёпкин Е. С., 2014.

**Постановка проблемы.** Процесс производства бумаги проходит на бумагоделательной машине (БДМ) и состоит из ряда последовательно проходящих стадий: подготовка бумажной смеси, разбавление ее водой, очистка от примесей, напуск смеси на сетку, формование бумажного полотна, обезвоживание на пресах, сушка бумажного полотна, каландрирование [1].

Технология производства бумаги – дорогостоящий процесс с большими затратами сырья и энергии. Наиболее энергоемким процессом является удаление воды из бумажного полотна. Оно происходит при помощи серии последовательно проходящих стадий, пока не будет достигнуто заданное значение влажности. Первоначально удаление воды происходит путем дренажа на сеточном столе и вакуумирования на отсасывающих ящиках. Когда полотно достигает влажности 75...80 % (в зависимости от вида бумаги), оно переходит в прессовую часть, где влагу удаляют при помощи механических прессов. Это наиболее экономичная секция удаления воды, поэтому на ней стараются удалить максимально возможное количество влаги. Однако достигается такое значение влажности, при котором механическое обезвоживание приводит к разрушению внутренней структуры полотна и отрицательно сказывается на качестве готовой продукции. Поэтому дальнейшее удаление воды возможно только термическим способом в сушильной части БДМ. Содержание влаги в бумаге, поступающей в сушильную часть, зависит от эффективности прессов и может составлять от 60 до 75 %. После сушки содержание влаги колеблется в пределах от 5 до 10 %.

Математическое моделирование процесса сушки бумаги является очень сложной задачей, связанной с особым процессом переноса теплоты и влаги в материале, имеющем капиллярно-пористую структуру. Сложность моделирования вызвана также чередованием разных способов теплообмена полотна бумаги с нагревающим агентом. Присутствуют стадии контактной и конвективной сушки. Еще одной особенностью, является необходимость разработки отдельных математических моделей для трёх последовательно проходящих этапов сушки: прогрева полотна, периода постоянной и падающей скорости сушки.

**Анализ предыдущих исследований.** Вопросом моделирования сушки занималось большое количество специалистов [1–3]. Наибольшее влияние на работы большинства их них оказали четыре «флагмана» данных исследований – У. Льюис, Т. Шервуд, А. Лыков, В. Красников [4–7]. Именно они создали основные уравнения кинетики тепло- и массопереноса в капиллярно-пористых коллоидных телах и именно на их исследованиях следует базировать исследования.

В работе [1] предлагается использовать методику приближенного моделирования процесса теплопередачи на сушильном цилиндре БДМ. Ее суть заключается в априори заданной структуре модели, что предполагает её единую структуру для всех этапов сушки. Однако физика процесса тепло- и массопереноса на разных стадиях различается, и обобщенную модель можно использовать только для приближенного расчета [5]. Для создания оптимальной системы автоматического управления этого недостаточно, необходимо более подробное рассмотрение всех стадий.

В работах [2, 3] построены математические модели сушки бумажного полотна в соответствии с работами А. Лыкова [5]. В отличие от работы [1], в них рассмотрен процесс сушки, разделенный на этапы, и для каждого из них построены свои модели, представленные в виде систем дифференциальных уравнений. От-

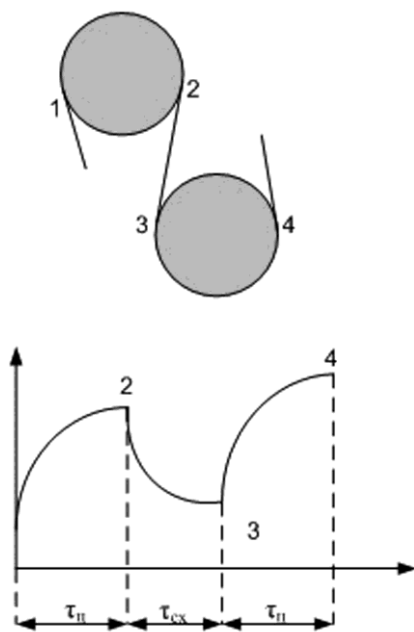
дельно рассматриваются контактная и конвективная часть суши. Преимуществом этих моделей, является обоснование вида градиента температуры и влажности по толщине материала в виде параболы. В этих же работах формулируется предположение, что в конце суши значения температуры и влажности будут одинаковы по толщине бумаги. Это утверждение не всегда правильно, что было показано в работах [5, 7, 8], и оно может быть использовано только при рассмотрении тонких видов бумаги. Для более толстого материала, при использовании математических моделей, предложенных в рассматриваемых работах, необходимо рассчитывать параметры по толщине бумаги. При использовании работ [2, 3] в результате длительного расчета будет получено большое количество данных, которые усложнят анализ работы системы и скажутся на быстродействии системы управления. В связи с этим, научной проблемой является разработка новой математической модели с меньшим количеством расчетного материала и той же конечной точностью результатов, которая позволит получить значения температуры и влажности в любой момент времени в ключевых точках.

**Целью** статьи является получение математической модели прогрева бумажного полотна, которая бы учитывала перенос теплоты и влаги в материале при поочередно контактной и конвективной сушке.

**Общие положения сушки на этапе прогрева полотна.** При прохождении по сушильной части машины, влажное полотно бумаги огибает часть боковой поверхности нагретых цилиндров, воспринимает теплоту, нагревается и из него испаряется влага. Передача теплоты от нагретой поверхности цилиндров полотну материала происходит путем непосредственного соприкосновения – контакта или кондукции.

На участке свободного пробега полотно материала соприкасается с окружающим воздухом, в результате чего происходит интенсивное испарение влаги за счет теплоты, аккумулированной бумажным полотном на цилиндрах, и теплообмена с окружающей средой.

Перемещение влаги в материале происходит в виде жидкости и пара при наличии насыщенного и ненасыщенного слоя пористой структуры у греющей поверхности. Соответственно, будут и разные процессы тепломассопереноса. Интенсивность контактно-конвективной сушки определяется внешними и внутренними условиями процессов, в зависимости от которых задействованы диффузионный, фильтрационный и фильтрационно-диффузионный механизмы тепломассопереноса. На каждом этапе сушки действуют свои, специфические, механизмы переноса теплоты и пара, которые описываются разными дифференциальными уравнениями.



**Рис.1 – Контрольные точки контакта бумажного полотна с сушильным цилиндром и участки свободного хода**

На рассматриваемом этапе прогревание полотна, перенос теплоты и массы протекают по диффузионному механизму. При этом под действием градиентов температуры и влагосодержания происходит существенное перераспределение влаги по толщине материала.

При рассмотрении процессов тепломассообмена на цилиндрах и участках свободного хода следует учитывать параметры воздуха в межцилиндровых пространствах, скорости движения полотна, диаметр и температуру поверхности сушильных цилиндров. Интенсивность процессов определяется, главным образом, тепломассообменом между бумажным полотном и нагретыми сушильными цилиндрами; между бумажным полотном и окружающим воздухом; между бумажным полотном и прижимным сукном.

**Температура бумажного полотна при прохождении через сушильный цилиндр.** Нестационарность тепломассообмена при сушке бумажного полотна на многоцилиндровых установках обусловлена, прежде всего, периодичностью соприкосновения влажного материала с нагретыми цилиндрами и окружающим воздухом, а также периодами сушки влажных материалов. По этим причинам расчет кинетики тепломассообмена контактно-конвективных установок целесообразно вести по циклам, включающим в себя длительность пребывания полотна на греющей поверхности цилиндра  $\tau_c$  и участке свободного хода  $\tau_{cx}$  (рис. 1).

Запишем уравнение теплового баланса и теплообмена во время пребывания бумажного полотна на сушильном цилиндре (единичная площадь) [8]:

$$dq_{\text{кт}} = \alpha_{\text{кт}} (t_{\text{ц}} - t_{\text{б}}) d\tau = (c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} u_0) P_{\text{сп}} dt_{\text{б}}, \quad (1)$$

где  $t_{\text{ц}}$ ,  $t_{\text{б}}$  – температура сушильного цилиндра и бумажного полотна, °С;  $\alpha_{\text{кт}}$  – коэффициент контактного теплообмена, Вт/(м<sup>2</sup> · К);  $\tau$  – продолжительность контакта бумажного полотна сушильным цилиндром, с;  $P_{\text{сп}}$  – масса квадратного метра сухого полотна, г/м<sup>2</sup>;  $c_{\text{сп}}$  – удельная массовая теплоемкость сухого полотна бумаги, кДж/(кг · К);  $c_{\text{в}}$  – удельная массовая теплоемкость воды, кДж/(кг · К);  $u_0$  – начальное влагосодержание бумажного полотна, кг/кг.

После преобразований:

$$\frac{dt_{\text{б}}}{(t_{\text{ц}} - t_{\text{б}})} = \frac{\alpha_{\text{кт}}}{(c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} + u_0) P_{\text{сп}}} d\tau.$$

Проведя интегрирование последнего уравнения по  $t_{\text{б}}$ , получим:

$$\frac{t_{\text{ц}} - t_{\text{б}2}}{t_{\text{ц}} - t_{\text{б}1}} = \exp \frac{\alpha_{\text{кт}} \tau_{\text{ц}}}{(c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} + u_0) P_{\text{сп}}}, \quad (1)$$

где  $t_{\text{б}1}$ ,  $t_{\text{б}2}$  – температура бумаги в начале и конце сушильного цилиндра, °С.

Из выражения (1) можно найти температуры бумаги на выходе из сушильного цилиндра:

$$t_{\text{б}2} = t_{\text{ц}} - \frac{t_{\text{ц}} - t_{\text{б}1}}{\exp \frac{\alpha_{\text{кт}} \tau_{\text{ц}}}{(c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} + u_0) P_{\text{сп}}}}.$$

Данного уравнения достаточно, если происходит сушка материала малой толщины. В этом случае отсутствует градиент температуры по толщине бумаги.

Температура по ширине бумаги будет одинаковой. Это связано с равномерной температурой полотна на выходе с прессовой части и одинаковой температуре по ширине сушильного цилиндра.

Когда речь идет о толстом материале, полученное уравнение с небольшими преобразованиями, можно использовать исключительно для расчета температуры контактного слоя материала:

$$t_{\text{кс}} = t_{\text{ц}} - \frac{t_{\text{ц}} - t_{\text{кс}0}}{\exp \frac{\alpha_{\text{кт}}}{(c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} + u_{\text{кс}}) P_{\text{сп}}}}, \quad (2)$$

где  $t_{\text{кс}}$  и  $t_{\text{кс}0}$  – температура контактного слоя и бумаги в начале сушильного цилиндра, °С.

**Температуры центрального слоя бумажного полотна.** При нагревании полотна на сушильных цилиндрах, в первую очередь, повышается температура пограничного слоя, тогда как средняя часть прогревается медленнее. Для эффективного процесса сушки необходимо, чтобы после этапа прогрева бумага по всей ее толщине достигла «рабочего» значения температуры. В связи с этим для толстых видов бумаги возникает необходимость расчета температуры центрального слоя. Для этого необходимо вывести другое уравнение. В его основу будет положено уравнение нестационарной теплопроводности [4]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon r}{(c_{\text{с}} + c_{\text{в}} u)} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (3)$$

где  $t$  – температура, °С;  $\tau$  – продолжительность процесса, ч;  $x$  – координата;  $a$  – температуропроводность материала, м<sup>2</sup>/ч;  $\varepsilon$  – коэффициент фазового превращения;  $u$  – влагосодержание, кг/кг;  $c_{\text{с}}$  – удельная массовая теплоемкость сухого материала, кДж/(кг · К);  $c_{\text{в}}$  – удельная массовая теплоемкость воды, кДж/(кг · К).

В правой части уравнения присутствуют два слагаемых. Первое отображает перенос теплоты за счет теплопроводности, второе – с паром.

Из экспериментальных данных, полученных А. Лыковым [4], распределение температуры в материале имеет вид параболы с вершиной (минимальная температура) в центральном слое материала. В связи с этим, равноценна замена уравнения (3) на

$$y = -ax^2 + b, \quad (4)$$

где  $y$  – температура бумажного полотна, °С;  $x$  – координата по толщине материала, м;  $a$ ,  $b$  – коэффициенты параболы.

Исходя из внешнего вида параболы, для создания системы оптимального управления необходимо рассчитать температуру только центрального слоя бумаги.

В рассматриваемых граничных условиях при  $x = 0$ ;  $b = t_{ц}$ , при  $x = R$ ;  $a = (t_{кc} - t_{ц})/R^2$ , де  $R$  – полутолщина материала, м. Подставив эти значения в уравнение (4), получим температуру в сечении материала:

$$t = \frac{(t_{кc} - t_{ц})x^2}{R^2} + t_{ц}$$

Дифференцируя данное уравнение дважды по  $dx$ , получим:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 2 \frac{(t_{кc} - t_{ц})}{R^2}$$

Подставив в исходное уравнение, получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 2a \frac{(t_{кc} - t_{ц})}{R^2} - \frac{\varepsilon r}{(c_c + c_w u)} 2a_m \frac{(u_{кc} - u_{ц})}{R^2},$$

где  $a_m$  – коэффициент теплопроводности, м<sup>2</sup>/ч;  $u_{ц}$  – влагосодержание центрального слоя, кг/кг.

После преобразований, из данного уравнения можно получить температуру центрального слоя бумаги:

$$t_{ц} = t_{кc} - \frac{1}{2a} \left( \frac{\alpha(t_c - t_{кc})R}{c_c \rho R} + \frac{a_m \varepsilon r (u_{ц} - u_{кc})}{(c_c + c_w u)} \right). \quad (5)$$

Наибольшую сложность при расчете по данной формуле представляет определение коэффициента  $\varepsilon$ . Он был введен искусственно и представляет собой долю потока теплоты, переносимого паром, который образовался в слое материала, в общем тепловом потоке. В расчет принимается только поток теплоты, переносимый паром, поскольку перенос теплоты с жидкостью невелик, поскольку она обладает меньшей энтальпией по сравнению с паром.

В общем случае коэффициент  $\varepsilon$  предложено рассчитывать [5], но этот данный способ довольно сложен и требует большего количества дополнительных вычислений.

Существует другой подход к определению этого коэффициента, который зависит от типа бумаги (толщины) и температуры греющего цилиндра. Его значение можно получить, выбрав соответствующую точку на графике, который был построен по экспериментальным данным [5].

**Влагосодержание в пограничном слое бумаги при прохождении через сушильный цилиндр.** В рассматриваемый период сушки (этап прогрева), испарение влаги с поверхности материала происходит в основном благодаря разности парциальных давлений у поверхности материала и в окружающей среде [6, 7]. Термодиффузия на этой стадии практически отсутствует, потому в расчет её не принимаем.

При использовании закона Дальтона [8] процесс испарения считают испарением со свободной поверхности. В ходе сушки поверхности бумаги меняются местами относительно сушильного цилиндра, поочередно соприкасаясь с ним, в связи с этим можно считать, что значения температуры и влажности будут одинаковы для каждой из сторон бумаги. Исходя из этого, будет рассмотрена только одна сторона (пограничный слой).

Влагосодержание пограничного слоя на первом этапе можно рассчитать по формуле [7]:

$$u_{кc} = u_{кc0} - \beta_p (p_n - p_{ов}) \frac{760}{B}, \quad (6)$$

где  $u_{кc}$ ,  $u_{кc0}$  – влагосодержание контактного (пограничного слоя) в начале и конце сушильного цилиндра, кг/кг;  $\beta_p$  – коэффициент массообмена, отнесенный к разности парциальных давлений, кг/(м<sup>2</sup> · ч · Па);  $p_n$ ,  $p_{ов}$  – парциальные давления на поверхности материала и в окружающей среде, Па;  $B$  – коэффициент, учитывающий особенности материала, воздуха и протекания процесса.

**Расчет влагосодержания в центральном слое.** Расчет будет проведен по аналогичному принципу, как для температуры. Вначале запишем уравнение нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = b_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_m k_t \frac{\partial^2 t}{\partial x^2},$$

где  $u$  – влагосодержание бумажного полотна, кг/кг;  $\tau$  – продолжительность процесса, ч;  $k_t$  – термоградиентный коэффициент, К<sup>-1</sup>;  $t$  – температура материала, °С;  $x$  – координата;  $b_m$  – потенциал теплопроводности, м<sup>2</sup>/ч.

Первое слагаемое в правой части показывает количество влаги, переносимой за счет градиента влагосодержания, второе – за счет градиента температур. Учитывая незначительность переноса влаги второй составляющей, её можно пренебречь. Это особенность только первого этапа, поскольку температура бумаги еще недостаточно высока [5].

Как и распределение температуры, изменение влажности по толщине бумаги соответствует параболе с максимальной точкой по центру полотна. В связи с этим необходимо найти именно значение влагосодержания для центрального слоя бумаги. Выполнив операции, приведенные выше для температуры, получим:

$$u_{\text{цен}} = u_{\text{кс}} + \frac{\beta_p (p_{\text{п}} - p_{\text{ов}}) R^2}{b_m P_m}, \quad (7)$$

где  $u_{\text{цен}}$  – влагосодержание центрального слоя бумаги, кг/кг;  $u_{\text{кс}}$  – влагосодержание контактного слоя, кг/кг;  $p_{\text{п}}$ ,  $p_{\text{ов}}$  – парциальное давление водяных паров у поверхности и в окружающей среде, Па;  $P_m$  – масса одного квадратного метра бумажного полотна, кг/м<sup>2</sup>.

В современных сушильных машинах используют прижимные сукна из синтетического материала. Их особенностью является то, что они не задерживают в себе влагу. Поэтому расчет влагопроводности производят напрямую между бумагой и окружающей средой, без учета полотна.

**Участок свободного хода.** Для участка свободного хода необходимо дополнительно составить только математическую модель теплообмена между окружающей средой и пограничным слоем. Модель переноса теплоты в материале будет аналогичной формуле (5) с заменой температуры сушильного цилиндра температурой окружающей среды. Поскольку испарение влаги рассматривалось выше для открытой поверхности, данная модель влагопереноса будет действительна и для участка свободного хода.

На участках свободного хода бумажное полотно охлаждается, из него испаряется влага. Процесс происходит под действием разности парциальных давлений, у поверхности испарения устанавливается парциальное давление пара, соответствующее температуре насыщенного состояния.

**Температура бумажного полотна на участке свободного хода.** Запишем уравнение теплового баланса при испарении влаги с поверхности полотна за счет аккумулированной на цилиндре теплоты:

$$\beta_p (p_{\text{п}} - p_{\text{ов}}) r d\tau = P_{\text{сн}} (c_{\text{с}} + c_{\text{w}} u) dt_{\text{п}}. \quad (8)$$

Левая часть уравнения выражает количество теплоты, переданное бумажным полотном окружающему воздуху за счет испарения влаги. Правая часть уравнения соответствует снижению энтальпии влажного материала.

Интегрировать уравнение (8) не представляется возможным, поскольку в левой части находятся парциальные давления, а в правой – температуры. В связи с этим необходимо заменить давления температурами. Для разных интервалов температур вид замены будет отличаться. За основу взят закон Шарля (второй закон Гей-Люссака) [8].

Рассмотрим вначале диапазон температур от 0 до 60 °С.

Замена будет иметь следующий вид [9]:

$$\frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{нп}}} = \frac{t_{\text{п}}}{t_{\text{нп}}}.$$

В данном случае имеем пропорциональное отношение парциальных давлений и температур.

Исходя из того что при атмосферном давлении давление насыщенного пара  $p_{\text{нп}} = 100$  атм и его температура  $t_{\text{нп}} = 100$  °С, парциальное давление водяных паров у поверхности испарения [9]:

$$p_{\text{п}} = p_{\text{нп}} \frac{t_{\text{п}}}{100} = 1 \frac{t_{\text{п}}}{100} = v.$$

Перепишем уравнения (8) в следующем виде:

$$\beta_p (v - a) r d\tau = P_{\text{сн}} (c_{\text{с}} + c_{\text{w}} u) dv, \quad (9)$$

где  $a$  – парциальное давление пара в окружающем воздухе.

Проинтегрировав уравнение (9), можно выразить давление:

$$p_{\text{п}} = \frac{p_{\text{ов}} + (p_{\text{п0}} - p_{\text{ов}})}{\exp \frac{\beta_p r \tau_{\text{сх}}}{P_{\text{сн}} (c_{\text{с}} + c_{\text{w}} u)}}. \quad (10)$$

Рассмотрим следующий интервал температур – от 60 до 80 °С.

Зависимость давлений и температур тут будет иметь другую форму – квадратичную ( $a = b^2$ ). В связи с этим замена будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{нп}}} = \left( \frac{t_{\text{п}}}{t_{\text{нп}}} \right)^2.$$

Отсюда уравнение (8) будет иметь вид:

$$\beta_p (v^2 - a^2) r d\tau = P_{\text{сн}} (c_c + c_w u) dv.$$

После интегрирования получим:

$$\frac{(\sqrt{P_{\text{п}}} - \sqrt{P_{\text{ов}}})(\sqrt{P_{\text{п0}}} + \sqrt{P_{\text{ов}}})}{(\sqrt{P_{\text{п}}} + \sqrt{P_{\text{ов}}})(\sqrt{P_{\text{п0}}} - \sqrt{P_{\text{ов}}})} = 4a \exp \frac{\beta_p r \tau_{\text{сх}}}{P_{\text{сн}} (c_c + c_w u)}. \quad (11)$$

Из этого уравнения необходимо найти  $p_{\text{п}}$ .

Для диапазона от 80 до 100 °С зависимость между давлением и температурой описывается отношением в третьей степени:

$$\frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{пп}}} = \left( \frac{t_{\text{п}}}{t_{\text{пп}}} \right)^3.$$

После идентичных преобразований, которые были описаны выше, получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{6p_{\text{ов}}^{0,67}} \left( \begin{aligned} & \ln \frac{(p_{\text{ов}}^{0,33} - p_{\text{п}}^{0,33})^2}{p_{\text{ов}}^{0,67} + p_{\text{ов}}^{0,33} p_{\text{п1}}^{0,33} + p_{\text{п1}}^{0,67}} + \frac{1}{p_{\text{ов}}^{0,67} \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2p_{\text{п}}^{0,33} + p_{\text{ов}}^{0,33}}{p_{\text{ов}}^{0,33} \sqrt{3}} - \\ & - \ln \frac{(p_{\text{ов}}^{0,33} - p_{\text{п0}}^{0,33})^2}{p_{\text{ов}}^{0,67} + p_{\text{ов}}^{0,33} p_{\text{п0}}^{0,33} + p_{\text{п0}}^{0,67}} + \frac{1}{p_{\text{ов}}^{0,67} \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2p_{\text{п0}}^{0,33} + p_{\text{ов}}^{0,33}}{p_{\text{ов}}^{0,33} \sqrt{3}} \end{aligned} \right) = \frac{\beta_p r \tau_{\text{сх}}}{P_{\text{сн}} (c_c + c_w u)}. \quad (12)$$

Из уравнения выше, методом итераций, можно определить давление пара у поверхности испарения.

После получения численного значения давления пара у поверхности испарения можно, при помощи таблицы [9], найти температуру бумажного полотна в конце участка свободного хода.

Такой способ подходит для единичных расчетов температур. Когда речь идет о создании системы автоматического управления, целесообразно сформулировать, на основе табличных данных, зависимость между давлением и температурой. Наиболее точно соответствует табличным данным [9] зависимость

$$t_{\text{кс}} = 21,844 \ln(p_{\text{п}}) - 2,564. \quad (13)$$

Таким образом, для расчета температуры в конце участка свободного хода, необходимо определить давление (по соответствующей формуле) и подставить полученное значение в (13). Для примера, напомним формулу для расчета температуры в конце свободного хода для диапазона начальных температур 0...60 °С. Для этого необходимо в уравнение (13) подставить вместо  $p_{\text{п}}$  выражение (10). Тогда:

$$t_{\text{кс}} = 21,488 \frac{p_{\text{ов}} + (p_{\text{п0}} - p_{\text{ов}})}{\exp \frac{\beta_p r \tau_{\text{сх}}}{P_{\text{сн}} (c_c + c_w u)}} - 2,564.$$

**Общая математическая модель сушки на этапе прогресса бумажного полотна.** Модель, полученная в ходе проведения работы, состоит из двух частей: математическая модель контактной сушки, математическая модель конвективной сушки.

Запишем уравнения для первого сушильного цилиндра и следующего за ним участка свободного хода. Для всех остальных участков уравнения будут аналогичными.

Сначала запишем общий вид первой составляющей. Для точности управления температурой и влажностью бумажного полотна необходимо знать эти параметры, прежде всего, для центрального слоя. Обобщим полученные ранее уравнения для этапа контактной сушки.

Для получения общего уравнения расчета температуры центрального слоя на выходе из сушильного цилиндра необходимо в уравнение (5) вместо  $t_{\text{кс}}$  (температура контактного слоя) поставить выражение (2). Для расчета влагосодержания центрального слоя – в уравнение (7) вместо  $u_{\text{кс}}$  (влагосодержание контактного слоя) поставить выражение (6). В итоге получим следующие уравнения:

$$t_{\text{цен}} = \left( t_{\text{ц}} - \frac{t_{\text{ц}} - t_{\text{кц0}}}{\exp \frac{\alpha_{\text{КТ}}}{(c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} + u_{\text{кц}}) P_{\text{сп}}}} \right) - \frac{1}{2a} \left( \frac{\alpha \left( t_{\text{с}} - \left( t_{\text{ц}} - \frac{t_{\text{ц}} - t_{\text{кц0}}}{\exp \frac{\alpha_{\text{КТ}}}{(c_{\text{сп}} + c_{\text{в}} + u_{\text{кц}}) P_{\text{сп}}}} \right) \right) R}{c_{\text{с}} \rho R} + \frac{a_m \varepsilon r (u_{\text{цен}} - u_{\text{кц}})}{(c_{\text{с}} + c_{\text{в}} u)} \right)$$

$$u_{\text{цен}} = \left( u_{\text{кц0}} - \beta_{\text{р}} (p_{\text{п}} - p_{\text{ов}}) \frac{760}{B} \right) + \frac{\beta_{\text{р}} (p_{\text{п}} - p_{\text{ов}}) R^2}{b_m P_m}$$

Для расчета значений температуры и влагосодержания на первом цилиндре имеются все необходимые данные. Бумага на цилиндр поступает с известными значениями начальной температуры и влагосодержания ( $t_{\text{кц0}}$ ,  $u_{\text{кц0}}$ ). Известна температура сушильного цилиндра  $t_{\text{ц}}$ . Предварительно задают коэффициент контактного теплообмена, продолжительность пребывания бумаги на цилиндре, массу метра квадратного сухого полотна, удельную массовую теплоемкость сухого полотна и воды, коэффициент массообмена, отнесенный к разности парциальных давлений, коэффициент  $B$ , парциальные давления на поверхности материала и в окружающей среде.

Для участка конвективной сушки аналогичные уравнения можно получить так: температуру центрального слоя бумажного полотна на участке свободного хода рассчитывают по формуле (5), заменяя  $t_{\text{кц}}$  (температура контактного слоя) выражением (13) с использованием соответствующей формулы для  $p_{\text{п}}$ . Формулы выбирают по температуре бумаги в начале свободного хода. Если она находится в диапазоне 0...60 °С, используют формулу (10), 60...80 °С – (11), 80...100 °С – (12). Влагосодержание рассчитывают по формуле (7), подставляя вместо  $u_{\text{кц}}$  (влагосодержание контактного слоя) выражение (6).

Окончательные уравнения для конвективного участка сушки будут иметь вид:

$$t_{\text{цен}} = (21,488 p_{\text{п}} - 2,564) - \frac{1}{2a} \left( \frac{\alpha (t_{\text{с}} - (21,488 p_{\text{п}} - 2,564)) R}{c_{\text{с}} \rho R} + \frac{a_m \varepsilon r (u_{\text{цен}} - u_{\text{кц}})}{(c_{\text{с}} + c_{\text{в}} u)} \right),$$

$$u_{\text{цен}} = \left( u_{\text{кц0}} - \beta_{\text{р}} (p_{\text{п}} - p_{\text{ов}}) \frac{760}{B} \right) + \frac{\beta_{\text{р}} (p_{\text{п}} - p_{\text{ов}}) R^2}{b_m P_m}$$

**Выводы и пути дальнейших исследований.** В ходе работы рассмотрен первый этап сушки бумажного полотна. Проанализирована физика процессов переноса теплоты и влаги в материале и за его пределами. Установлены законы, по которым протекают данные процессы. На основании предыдущих исследований, с учетом их недостатков и новых требований для создания эффективной системы автоматического управления, разработана математическая модель прогрева материала для первого этапа сушки бумажного полотна на бумагоделательной машине. Приведены дополнительные данные, необходимые для расчета параметров температуры и влагосодержания.

В дальнейшем разработанная модель будет использована для решения задачи оптимального управления этапом прогрева бумажного полотна и разработки системы автоматического управления. Также будут созданы математические модели для двух остальных этапов сушки и построена комплексная система автоматического управления всем отделом сушки бумажного полотна.

#### Список использованной литературы

1. Гринченко И. А. Совершенствование систем управления процессом сушки бумаги / И. А. Гринченко, В. В. Пожитков, Ю. С. Жукова // Целлюлоза. Бумага. Картон. – 2009. – № 1. – С. 80-81.
2. Тимофеев О. Н. Конвективный теплообмен при сушке бумаги на многоцилиндровых контактных сушильных установках / О. Н. Тимофеев, А. П. Вельский, В. И. Грачев. – Л., 1989. – 92 с.
3. Бойков Л. М. Совершенствование теплообмена при сервисном обслуживании установок сушки пористых волокнистых материалов / Л. М. Бойков, Н. С. Нечаев // Техника-технологические проблемы сервиса : межвуз. сб. науч. тр. – 2009. – № 8. – С. 35-39.
4. Красников В. В. Кондуктивная сушка / В. В. Красников. – М. : Энергия, 1973. – 288 с.
5. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1968. – 472 с.

6. Sherwood T. K. Mass transfer / Thomas K. Sherwood. – New-York : McGraw-Hill, 1975. – 240 p.
7. Lewis W. K. The evaporation of a liquid into a gas / W. K. Lewis // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. – 1922. – # 1849. – 325 p.
8. Фляте Д. М. Технология бумаги / Д. М. Фляте. – М. : Лесн. пром-ть, 1988. – 440 с.
9. Фляте Д. М. Свойства бумаги / Д. М. Фляте. – М. : Лесн. пром-ть, 1986. – 680 с.
10. Бельский А. П. Специальные вопросы тепломассообмена в энергетических и теплотехнологических процессах и установках / А. П. Бельский, В. Ю. Лакомкин. – СПб, 1997. – 100 с.
11. Новиков Г. И. Основы общей химии / Г. И. Новиков. – М. : Высш. шк., 1988. – 590 с.
12. Кротенко Т. Н. Математическая модель процесса сушки распылённых капиллярно-пористых тел при пониженном давлении / Т. Н. Кротенко, А. И. Русецкий // Вестн. Харьк. нац. ун-та ; сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2007. – № 780. – С. 130–142.
13. Волков А. И. Большой химический справочник / А. И. Волков, И. М. Жарский. – Мн. : Современная школа, 2005. – 402 с.

Надійшла до редакції 15.02.2014.

---

**Zhuchenko A. I., Cheropkin E. S.**

### **MATHEMATICAL MODEL OF HEATING PAPER WEB IN THE DRYING SECTION OF A PAPER MACHINE**

*Drying section of a paper machine is the final stage of dehydration of the paper web and largely affects on many indicators of quality of the finished product. All drying process consists of three successive stages of passing: heating a material, portion of constant drying rate and decreasing drying rate. The analysis of the first stage of drying, heating process is presented in this work. Each part of the process which can be separated into such components: transfer of heat and moisture on the contact portion of the paper web with the drying cylinder, on a plot of a free-wheeling and transferring heat and moisture inside the material. For each of them was created a mathematical model which allows to calculate the temperature and humidity of the paper web. For accurate simulation was made a detail analyze of heat transfer from the drying cylinder to a paper web. Due to the heterogeneity of the temperature field inside the material, the heat transfer is divided into two parts, from the drying cylinder to the material surface and from the surface to the central layer. On the site of a free-wheeling, most attention is given to processes of moisture transport from the center of the paper web into the environment through the material and drying the cloth.*

*As the dryer section consists of a series of repeated cycles, in the work was given the generalized mathematical model that calculates the parameters of paper at the end of each cycle under certain initial parameters of the paper drying cylinder and the ambient air.*

*The mathematic model, presented in this work, is the first part of the model that describes overall process of drying a paper web on a paper machine. Supplemented by models for areas of constant and falling drying rate, they allow calculating the parameters of the product at any point in its location in the dryer section. On the basis of the general model will be possible to build an optimal automatic control system. Such system will solve the actual task of reducing the cost of the paper web drying process with maintaining the specified quality parameters.*

**Keywords:** paper machine, a mathematical model, dryer section, the first stage of drying, temperature, humidity.

#### **References**

1. Grinchenko I. A. Sovershenstvovanie sistem upravlenija processom sushki bumagi [Improvement of process control systems in paper drying] / I. A. Grinchenko, V. V. Pozhitkov, Ju. S. Zhukova // Celljuloza. Bumaga. Karton. – 2009. – № 1. – S. 80-81.
2. Timofeev O. N. Konvektivnyj teplomassoobmen pri sushke bumagi na mnogocilindrovyyh kontaktnyyh sushil'nyh ustanovkakh [Convective heat and mass transfer during drying of paper on multi-cylinder contact dryers] / O. N. Timofeev, A. P. Vel'skij, V. I. Grachev. – L., 1989. – 92 s.
3. Bojkov L. M. Sovershenstvovanie teplomassoperenosa pri servisnom obsluzhivanii ustanovok sushki poristykh voloknistyykh materialov [Improvement of heat and mass transfer in a service setting drying of porous fibrous materials] / L. M. Bojkov, N. S. Nechaev // Tehniko-tehnologicheskie problemy servisa : mezhvuz. sb. nauch. tr. – 2009. – № 8. – S. 35-39.
4. Krasnikov V. V. Konduktivnaja sushka [Conductive drying] / V. V. Krasnikov. – М. : Jenergija, 1973. – 288 s.
5. Lykov A. V. Teorija sushki [Theory of drying] / A. V. Lykov. – М. : Jenergija, 1968. – 472 s.



6. Sherwood T. K. Mass transfer / Thomas K. Sherwood. – New-York : McGraw-Hill, 1975. – 240 p.
  7. Lewis W. K. The evaporation of a liquid into a gas / W. K. Lewis // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. – 1922. – # 1849. – 325 p.
  8. Fljate D. M. Tehnologija bumagi [Paper technology] / D. M. Fljate. – M. : Lesn. prom-t', 1988. – 440 s.
  9. Fljate D. M. Svojstva bumagi [Properties of the paper] / D. M. Fljate. – M. : Lesn. prom-t', 1986. – 680 s.
  10. Bel'skij A. P. Special'nye voprosy teplomassoobmena v jenergeticheskikh i teplotnologicheskikh processah i ustanovkah [Specific issues in the heat and mass transfer processes in energy and thermal processing plants] / A. P. Bel'skij, V. Ju. Lakomkin. – SPb, 1997. – 100 s.
  11. Novikov G. I. Osnovy obshhej himii [Fundamentals of General Chemistry] / G. I. Novikov. – M. : Vyssh. shk., 1988. – 590 s.
  12. Krotenko T. N. Matematicheskaja model' processa sushki raspyljonnyh kapilljarno-poristyh tel pri ponizhenom davlenii [Mathematical model of drying capillary-porous materials under reduced pressure] / T. N. Krotenko, A. I. Ruseckij // Vestn. Har'k. nac. un-ta ; ser. «Matematicheskoe modelirovanie. Informacionnye tehnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravlenija». – 2007. – № 780. – С. 130–142.
  13. Volkov A. I. Bol'shoj himicheskij spravocnik [Big chemical directory] / A. I. Volkov, I. M. Zharskij. – Mn. : Sovremennaja shkola, 2005. – 402 s.
- 

УДК 681.5.015

**КУБРАК А. І., к.т.н., проф.; ЖУЧЕНКО О. А., к.т.н., ас.**  
**Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»**

## **ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТЕПЛОАКУМУЛЮЮЧОЇ СТІНКИ: НОВІ ВАРІАНТИ**

*Наведено передатні функції й частотні характеристики циліндричної теплоакумулюючої стінки як об'єкта з розподіленими параметрами залежно від межових умов на зовнішній і внутрішній поверхнях. Отримані результати можуть бути використані для синтезу систем керування.*

**Ключові слова:** передатна функція, частотна характеристика, циліндрична теплоакумулююча стінка, межові умови.

© Кубрак А. І., Жученко О. А., 2014

**Постановка проблеми.** Майже всі реальні об'єкти керування в хімічній, харчовій, металургійній, нафтопереробній та інших галузях промисловості є об'єктами з розподіленими параметрами. Лише у деяких частинних випадках ці об'єкти можна з прийнятною похибкою звести до відповідних зосереджених об'єктів [1]. З ускладненням об'єктів і підвищенням вимог до точності та адекватності їхнього моделювання таке спрощення стає неможливим, потребуючи створення якісних математичних моделей для типових об'єктів із розподіленими параметрами.

**Аналіз попередніх досліджень.** Аналітичні методи розрахунку моделей об'єктів із розподіленими параметрами є точними та приблизними [2]. Точний розв'язок існує для найпростіших систем, які описують одним рівнянням у частинних похідних першого чи другого порядку [3, 4]. Розв'язки отримують методами джерел, розщеплювання змінних, перетвореннями Фур'є, Лапласа. Інші методи зводять розв'язки до системи інтегральних рівнянь типу Вольтера, Фредгольма, використання функцій Рімана [5, 6]. Але поширити ці методи на вирішення задач, пов'язаних із системами автоматичного керування, не завжди вдається.

З огляду на це, нижче розглядатимемо лише теплові об'єкти з розподіленими параметрами як найбільш поширені в промисловості, математичну модель яких будемо шукати у вигляді передатної функції, як найбільш придатної для досліджень з точки зору аналізу й синтезу систем керування за допомогою існуючих програмних засобів (MathCad, MatLab).

При цьому, щоб звузити клас досліджуваних об'єктів, а також враховуючи, що багато об'єктів хімічної, харчової, нафтопереробної, металообробної та інших галузей промисловості з точки зору математичного моделювання як об'єктів із розподіленими параметрами можна розглядати як циліндричні теплоакумулюючі стінки, **метою** статті визначено розроблення математичної моделі останньої у вигляді передатної функції.