

6. Sherwood T. K. Mass transfer / Thomas K. Sherwood. – New-York : McGraw-Hill, 1975. – 240 p.
 7. Lewis W. K. The evaporation of a liquid into a gas / W. K. Lewis // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. – 1922. – # 1849. – 325 p.
 8. Fljate D. M. Tehnologija bumagi [Paper technology] / D. M. Fljate. – M. : Lesn. prom-t', 1988. – 440 s.
 9. Fljate D. M. Svojstva bumagi [Properties of the paper] / D. M. Fljate. – M. : Lesn. prom-t', 1986. – 680 s.
 10. Bel'skij A. P. Special'nye voprosy teplomassoobmena v jenergeticheskikh i teplotehnologicheskikh processah i ustanovkah [Specific issues in the heat and mass transfer processes in energy and thermal processing plants] / A. P. Bel'skij, V. Ju. Lakomkin. – SPb, 1997. – 100 s.
 11. Novikov G. I. Osnovy obshhej himii [Fundamentals of General Chemistry] / G. I. Novikov. – M. : Vyssh. shk., 1988. – 590 s.
 12. Krotenko T. N. Matematicheskaja model' processa sushki raspyljonnyh kapilljarno-poristyh tel pri ponizhenom davlenii [Mathematical model of drying capillary-porous materials under reduced pressure] / T. N. Krotenko, A. I. Ruseckij // Vestn. Har'k. nac. un-ta ; ser. «Matematicheskoe modelirovanie. Informacionnye tehnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravlenija». – 2007. – № 780. – С. 130–142.
 13. Volkov A. I. Bol'shoj himicheskij spravocnik [Big chemical directory] / A. I. Volkov, I. M. Zharskij. – Mn. : Sovremennaja shkola, 2005. – 402 s.
-

УДК 681.5.015

КУБРАК А. І., к.т.н., проф.; ЖУЧЕНКО О. А., к.т.н., ас.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТЕПЛОАКУМУЛЮЮЧОЇ СТІНКИ: НОВІ ВАРІАНТИ

Наведено передатні функції й частотні характеристики циліндричної теплоакumuлюючої стінки як об'єкта з розподіленими параметрами залежно від межових умов на зовнішній і внутрішній поверхнях. Отримані результати можуть бути використані для синтезу систем керування.

Ключові слова: *передатна функція, частотна характеристика, циліндрична теплоакumuлююча стінка, межові умови.*

© Кубрак А. І., Жученко О. А., 2014

Постановка проблеми. Майже всі реальні об'єкти керування в хімічній, харчовій, металургійній, нафтопереробній та інших галузях промисловості є об'єктами з розподіленими параметрами. Лише у деяких частинних випадках ці об'єкти можна з прийнятною похибкою звести до відповідних зосереджених об'єктів [1]. З ускладненням об'єктів і підвищенням вимог до точності та адекватності їхнього моделювання таке спрощення стає неможливим, потребуючи створення якісних математичних моделей для типових об'єктів із розподіленими параметрами.

Аналіз попередніх досліджень. Аналітичні методи розрахунку моделей об'єктів із розподіленими параметрами є точними та приблизними [2]. Точний розв'язок існує для найпростіших систем, які описують одним рівнянням у частинних похідних першого чи другого порядку [3, 4]. Розв'язки отримують методами джерел, розщеплювання змінних, перетвореннями Фур'є, Лапласа. Інші методи зводять розв'язки до системи інтегральних рівнянь типу Вольтера, Фредгольма, використання функцій Рімана [5, 6]. Але поширити ці методи на вирішення задач, пов'язаних із системами автоматичного керування, не завжди вдається.

З огляду на це, нижче розглядатимемо лише теплові об'єкти з розподіленими параметрами як найбільш поширені в промисловості, математичну модель яких будемо шукати у вигляді передатної функції, як найбільш придатної для досліджень з точки зору аналізу й синтезу систем керування за допомогою існуючих програмних засобів (MathCad, MatLab).

При цьому, щоб звузити клас досліджуваних об'єктів, а також враховуючи, що багато об'єктів хімічної, харчової, нафтопереробної, металообробної та інших галузей промисловості з точки зору математичного моделювання як об'єктів із розподіленими параметрами можна розглядати як циліндричні теплоакumuлюючі стінки, **метою** статті визначено розроблення математичної моделі останньої у вигляді передатної функції.

Виклад основного матеріалу. Одновимірне диференціальне рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат має вигляд [1–4, 7]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Виконавши над ним перетворення Лапласа за нульових початкових умов $\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\theta}}{dr} - \frac{p}{a} \bar{\theta} = 0$ і замінивши змінну $r = \frac{x}{\sqrt{p/a}}$, після спрощення одержимо частинний (коли $m = 0$) випадок $\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \bar{\theta}}{dx} - \bar{\theta} = 0$ модифікованого диференціального рівняння Бесселя [8]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (2)$$

Розв'язок (2) доцільно подати так:

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x), \quad (3)$$

де I_0 і $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя I і II роду нульового порядку. Розкладання у ряд для цих функцій за малих x :

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots, \quad K_0(x) = -\left(C + \ln \frac{x}{2}\right) I_0(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots;$$

за великих x :

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1^2}{1!8x} + \frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2} + \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \right), \quad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{1^2}{1!8x} + \frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2} - \frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3} + \dots \right).$$

де $C = 0,5772157\dots$ – стала Ейлера.

Нагадаємо поведінку модифікованих функцій Бесселя за граничних значень аргументу:

$$\begin{cases} I_0(x)|_{x \rightarrow 0} = 1 \\ I_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = \infty \\ K_0(x)|_{x \rightarrow 0} = \infty \\ K_0(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}.$$

Похідні від $I_0(x)$ і $K_0(x)$: $\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$; $\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$.

Розкладання в ряди для малих значень аргументу дає

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \dots, \quad K_1(x) = \frac{1}{x} I_0(x) + \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_1(x) - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Асимптотичні ряди (за великих x):

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4-1^2}{1!8x} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right), \quad K_1(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{4-1^2}{1!8x} + \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right).$$

За граничних аргументів функції $I_1(x)$ і $K_1(x)$:

$$\begin{cases} I_1(x)|_{x=0} = 0 \\ I_1(x)|_{x \rightarrow \infty} = \infty \\ K_1(x)|_{x=0} = -\infty \\ K_1(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}.$$

З урахуванням виразу (3) розв'язок диференціального рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$\bar{\theta} = C_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 потрібно, зазвичай, задати межові умови. Довомимося позначати межові умови на внутрішній поверхні циліндра N_{gv} (значення 1, 2, 3 якого відповідатимуть межовим умовам першого, другого та третього роду), на зовнішній поверхні – N_{gz} (із відповідним змістом). Циліндр вважаємо в загальному випадку порожнистим із внутрішнім радіусом r_0 і зовнішнім – r_1 .

Результат розв'язання поставленої задачі повністю залежить від комбінації межових умов на зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра. Деякі варіанти проаналізовано в праці [9]. Розглянемо інші.

Варіант 1. $N_{gv} = 3, N_{gz} = 1$. У цьому випадку межові умови для рівняння (4):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = T_{sv}(t) - \theta \Big|_{r=r_1}, \\ \theta \Big|_{r=r_0} = T_z(t) \end{cases},$$

де λ – теплопровідність матеріалу циліндра; $T_{sv}(t)$ – температура внутрішнього середовища; α_0 – коефіцієнт тепловіддачі від внутрішнього середовища до поверхні циліндра

Перетворимо систему за Лапласом і підставимо у (4). Отримаємо

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[C_1 J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \bar{T}_{sv}(p) - C_1 J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ \bar{T}_z(p) = C_1 J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{cases}. \quad (5)$$

Використовуючи правило Крамера, знаходимо невідомі C_1 і C_2 :

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{T}_{sv}(p) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ \bar{T}_z(p) & K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} = \frac{\bar{T}_{sv}(p) K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \bar{T}_z(p) \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \bar{T}_{sv}(p) \\ J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \bar{T}_z(p) \end{vmatrix}}{Z_n(p)} = \frac{\left[J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \bar{T}_z(p) - J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \bar{T}_{sv}(p)}{Z_n(p)}.$$

де $Z_n(p) = J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]$.

Підставляючи C_1 і C_2 у вираз (5):

$$\bar{\theta} = \frac{\left\{ \bar{T}_{sv}(p) K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \bar{T}_z(p) \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \right\} J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \bar{T}_{sv}(p) \right] K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Звідси шукані передатні функції:

$$W_{T_{sv} \rightarrow \theta}(p, r) = \frac{K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{T_z \rightarrow \theta}(p, r) = \frac{\left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \left[K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

де $W_{T_{sv} \rightarrow \theta}(p, r)$ – передатна функція за каналом «температура внутрішнього середовища – температура циліндра за радіусом»; $W_{T_z \rightarrow \theta}(p, r)$ – передатна функція за каналом «температура зовнішньої поверхні циліндра – температура циліндра за радіусом».

Варіант 2. $N_{gv} = 3, N_{gz} = 2$. Межові умови для рівняння (4):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = T_{sv}(t) - \theta \Big|_{r=r_0}, \\ \theta \Big|_{r=r_0} = Q_z(t) \end{cases},$$

де $Q_z(t)$ – зовнішній тепловий потік

Після перетворення за Лапласом та підстановки у (4):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[C_1 J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \bar{T}_{sv}(p) - C_1 J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} = C_1 J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Коефіцієнти:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{T}_{sv}(p) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} & -K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \bar{T}_{sv}(p) K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \bar{T}_{sv}(p) \\ J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -\frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[-\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \bar{T}_{sv}(p) J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

де $Z_n(p) = \left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left[K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right)$.

Після підстановки C_1 і C_2 у рівняння (6):

$$\bar{\theta} = \frac{\left\{ \frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \bar{T}_{sv}(p) K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left\{ -\frac{\bar{Q}_z(p)}{\lambda \sqrt{\frac{p}{a}}} \left[-\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \bar{T}_{sv}(p) J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Передатні функції $W_{T_{sv} \rightarrow 0}(p, r)$ і $W_{Q_z \rightarrow 0}(p, r)$:

$$W_{T_{sv} \rightarrow 0}(p, r) = \frac{K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{Q_z \rightarrow 0}(p, r) = \frac{\left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \left[K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Варіант 3. $N_{gv} = 3, N_{gz} = 3$. Межові умови:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = T_{sv}(t) - \theta \Big|_{r=r_0} \\ -\frac{\lambda}{\alpha_1} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \theta \Big|_{r=r_0} - T_{sz}(t) \end{cases},$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра; α_1 – коефіцієнт тепловіддачі від зовнішнього середовища до поверхні циліндра; $T_{sz}(t)$ – температура зовнішнього середовища.

Перетворюємо рівняння за Лапласом і підставляємо у рівняння (4):

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[C_1 J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = \overline{T}_{sv}(p) - C_1 J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} \left[C_1 J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - C_2 K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] = C_1 J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + C_2 K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \overline{T}_{sz}(p) \end{cases}.$$

Невідомі коефіцієнти розраховуємо за формулами

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{T}_{sv}(p) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\overline{T}_{sz}(p) & \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \\ -\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\overline{T}_{sv}(p) \left[\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] + \overline{T}_{sz}(p) \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & \overline{T}_{sv}(p) \\ -\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) & -\overline{T}_{sz}(p) \end{vmatrix}}{Z_n(p)} =$$

$$= \frac{\overline{T}_{sv}(p) \left[-\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \overline{T}_{sz}(p) \left[-\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)},$$

$$Z_n(p) = \left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \left[\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] +$$

де

$$+ \left[J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right].$$

Рівняння (4) набуває вигляду:

$$\bar{\theta} = \frac{\left[\bar{T}_{sv}(p) \left(\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right) + \bar{T}_{sz}(p) \left[K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] \right] J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)} +$$

$$+ \frac{\left[\bar{T}_{sv}(p) J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - \bar{T}_{sz}(p) \left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)}.$$

Передатні функції за двома каналами:

$$W_{T_{sv} \rightarrow \theta}(p, r) = \frac{\left\{ \frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - K_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right\} J_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \left[\frac{\lambda}{\alpha_1} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + J_0 \left(r_1 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{T_{sz} \rightarrow \theta}(p, r) = \frac{J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left[K_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right] - K_0 \left(r \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \left[J_0 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) - \frac{\lambda}{\alpha_0} \sqrt{\frac{p}{a}} J_1 \left(r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \right]}{Z_n(p)}.$$

Для розрахунку частотних характеристик на базі передатних функцій слід взяти до уваги:

$$\begin{cases} I_0(x\sqrt{j}) = \text{ber } x + j \text{ bei } x, \\ \sqrt{j} I_1(x\sqrt{j}) = \text{ber}' x + j \text{ bei}' x, \\ K_0(x\sqrt{j}) = \text{ker } x + j \text{ kei } x, \\ \sqrt{j} K_1(x\sqrt{j}) = -(\text{ker}' x + j \text{ kei}' x). \end{cases}$$

Функції $\text{ber}(x)$ і $\text{bei}(x)$ (Bessel real, Bessel imagine), $\text{ker}(x)$ і $\text{kei}(x)$ (Kelvin real, Kelvin imagine) називають функціями Томсона (Кельвіна). Ці функції табульовано [8, 10]. Коли $x < 1$, їх можна обчислити так:

$$\text{ber}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{4n} [(2n)!]^2}; \quad \text{bei}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2};$$

$$\text{ker}(x) = \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{ber}(x) + \frac{\pi}{4} \text{bei}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m};$$

$$\text{kei}(x) = \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{bei}(x) + \frac{\pi}{4} \text{ber}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}; \quad \text{ber}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2};$$

$$\text{bei}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{2n+2} [(2n+1)!]^2}; \quad \text{ker}'(x) = -\frac{1}{x} \text{ber}(x) + \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{ber}'(x) - \frac{\pi}{4} \text{bei}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n} [(2n)!]^2} \sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m};$$

$$\text{kei}'(x) = -\frac{1}{x} \text{bei}(x) + \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) \text{bei}'(x) - \frac{\pi}{4} \text{ber}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{4n+2} [(2n+1)!]^2} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{m}.$$

$$\text{Коли } x \geq 1: \text{ber}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[L_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{bei}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[M_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - L_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{ker}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[L_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{kei}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[M_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - L_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{ber}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[S_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - T_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{bei}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[T_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + S_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{ker}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[S_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + T_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

$$\text{kei}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[T_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - S_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right];$$

де $L_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n-1)^2}{n!(8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right)$; $M_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n-1)^2}{n!(8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$;

$$S_0(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n!(8x)^n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$
; $T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \dots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n!(8x)^n} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$.

Для реалізації цього алгоритму слід мати підпрограми для обчислення функцій $\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$, $\text{ker}(x)$, $\text{kei}(x)$, а в загальному випадку – і $\text{ber}'(x)$, $\text{bei}'(x)$, $\text{ker}'(x)$, $\text{kei}'(x)$.

За необхідності ці підпрограми користувач може написати самостійно. Можна також скористатися таблицями відповідних функцій, сформувавши на їх базі інтерполяційні структури (поліноми, кубічні сплайни чи B-сплайни). Але найбільш доцільним виглядає чисельне інтегрування диференціальних рівнянь (1) із відповідними межовими умовами за одиничного ступінчастого вхідного сигналу та нульових початкових умов. Таким чином можна було б сформувати масив ординат перехідної характеристики. Шляхом чисельного диференціювання цей масив можна було б перерахувати в масив ординат імпульсної характеристики, а останній – у дійсно- та уявно-частотні характеристики. Такий алгоритм розглянуто у праці [10].

Висновки. Одержано передатні функції й частотні характеристики об'єктів із розподіленими параметрами, які з точки зору математичного моделювання розглядають як циліндричні теплоакуючі стінки. Передатні функції є трансцендентними. Їхнє безпосереднє використання для вирішення задач аналізу й синтезу систем керування не є тривіальним. Ця обставина обумовлює напрями **подальших досліджень**. Перший пов'язаний із розробленням методів безпосереднього використання передатних функцій нетривіальної структури для аналізу та синтезу систем керування. Другий – передбачає використання відомих методів аналізу й синтезу систем керування, але тоді передатні функції слід подавати у вигляді дробово-раціональних, що обумовлює потребу у розробленні відповідних методів апроксимації та аналізу їх ефективності.

Список використаної літератури

1. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. – М. : Высш. шк., 2005. – 292 с.
2. Шевяков А. А. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1965. – 474 с.
4. Бутковский А. Г. Методы управления систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.

5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 435 с.
6. *Лаврентьев М. А.* Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
7. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.
8. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
9. *Кубрак А. І.* Передатні функції та частотні характеристики циліндричної теплоакуюючої стінки / А. І. Кубрак, А. І. Жученко // Вісн. Нац. техн. ун-ту України «Київ. політехн. ін-т» : сер. «Хім. інженерія, екологія та ресурсозбереження». – 2013. – № 1 (11). – С. 81–88.
10. *Жученко А. І.* Ідентифікація динамічних характеристик. Комп'ютерні методи / А. І. Жученко, М. З. Кваско, Н. А. Кубрак. – К. : Вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. – 182 с.

Надійшла до редакції 16.04.2014.

Kubrak A. I., Zhuchenko O. A.

TRANSFER FUNCTIONS AND FREQUENCY RESPONSES OF CYLINDRICAL HEAT STORAGE WALL: NEW VERSIONS

Almost all real objects control in chemical, food, metallurgical, oil and other industries, in fact in the entire field of human activity are objects with distributed parameters.

From mathematical modeling point of view a lot of plants in different industries can be considered as cylindrical heat storage walls with distributed parameters. Selected research path based on the following considerations: consider only heat objects with distributed parameters as the most common in the industry; Mathematical model objects with distributed parameters obtained in the form of the transfer function as the most suitable for further research in terms of analysis and synthesis of control systems using existing software. The aim of this study was to receive transfer functions and frequency responses as mathematical models of above mentioned plants. To solve this problem the main equation of heat conductivity was put in basis. In addition three kinds of boundary conditions on external and internal wall surfaces were taken into account. Different combinations of boundary conditions on external and internal wall surfaces result in different kinds of transfer functions and frequency responses. These functions are transcendental and perhaps must be simplified for practical using. It was proposed few nontrivial ways in order to calculate frequency responses of cylindrical heat storage walls. To implement this calculation it is necessary to have available a subroutine for computing certain functions. If necessary, these routines can create their own with the above formulas. You can also use the tables of the functions, forming the basis of their structure interpolation (polynomial, cubic splines or B-splines). But most appropriate looks above numerical integration of differential equations with appropriate boundary conditions on single stepped input signal with zero initial conditions. Obtained results can be used for researching of plants, which can be considered as cylindrical heat storage walls with distributed parameters, and for control system synthesis.

Keywords: *transfer function, frequency response, cylindrical heat storage wall, boundary conditions.*

References

1. *Rapoport E. Y.* Analyz i sintez system avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennimy parametramy [Analysis and Synthesis of Automatic Control Systems with Distributed Parameters]. – Moscow : Vishaja shkola Publ., 2005. – 292 p.
2. *Sheviakov A. A., Yakovleva R. V.* Upravlenye teplovimy objektamy s raspredelennimy parametramy [Control of Heat Plants with Distributed Parameters]. – Moscow : Enerhoatomyzdat Publ., 1986. – 208 p.
3. *Butkovskiy A. H.* Teoriya optymalnoho upravleniya systemamy s raspredelennimy parametramy [Theory of Optimal Control by Systems with Distributed Parameters]. – Moscow : Nauka Publ., 1965. – 474 p.
4. *Butkovskiy A. H.* Metody upravleniya system s raspredelennimy parametramy [Methods of Control Systems with Distributed Parameters]. – Moscow : Nauka Publ., 1975. – 568 p.
5. *Vladymyrov V. S.* Uravneniya matematycheskoi fyzyky [Equations of Mathematical Physics]. – Moscow : Nauka Publ., 1976. – 435 p.
6. *Lavrentev M. A., Shabat B. V.* Problemy hydrodynamyky i ikh matematycheskiye modely [Hydrodynamics Problems and their Mathematical Models]. – Moscow : Nauka Publ., 1973. – 416 p.
7. *Butkovskiy A. H.* Kharakterystyky system s raspredelennimy parametramy [Responses of Systems with Distributed Parameters]. – Moscow: Nauka Publ., 1979. – 224 p.

8. Dwight H. B. Tablytsy yntehralov y druhye matematycheskye formuly [Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas]. – Moscow : Nauka Publ., 1977. – 368 p.
9. Kubrak A. I. Peredatni funktsii ta chastotni kharakterystyky tsylindrychnoi teploakumuliuuchoi stinky [Transfer Functions and Frequency Responses of Cylindrical Heat Storage Wall] / A. I. Kubrak, A. I. Zhuchenko // Visnyk natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy «Kyivskiy politekhnichnyi instytut»: seriya «khimichna inzheneriia, ekolohiia ta resursoberezhennia». – 2013. – # 1(11). – P. 81–88.
10. Zhuchenko A. I., Kvasko M. Z., Kubrak N. A. Identyfikatsiia dynamichnykh kharakterystyk. Kompiuterni metody [Identification of Dynamic Responses. Computer Methods]. – Kyiv : KLTkM Publ., 2000. – 182 p.

УДК 66.974.434

ЛАДІЄВА Л. Р., к.т.н., доц.; ШИРМА А. В., магістрант
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РЕЖИМОМ ПУСКУ АВТОКЛАВА У ВИРОБНИЦТВІ АЗОТНОЇ КИСЛОТИ

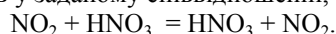
Запропоновано алгоритм оптимального керування режимом пуску автоклаву з використанням нелінійної математичної моделі, методу штрафів і градієнтної процедури.

Ключові слова: виробництво азотної кислоти, автоклав, оптимальне керування.

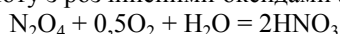
© Ладієва Л. Р., Ширма А. В., 2014.

Постановка проблеми. У виробництві концентрованої азотної кислоти з оксидів азоту вирізняють три стадії. Спочатку нітрозні гази проходять перший етап окиснення та відбілювання. Отриману слабо концентровану кислоту спрямовують у змішувач. На цьому етапі максимальна концентрація HNO_3 становить 40...55 %. На другому етапі азотну кислоту спрямовують в автоклав для досягнення концентрації 98...99 %. Заключний, третій етап – очищення кислоти від розчинених в ній оксидів азоту.

На другому етапі концентрування відбувається двостадійна реакція. На першій стадії оксид азоту NO_2 і кислота HNO_3 , які надходять в автоклав у заданому співвідношенні, утворюють нітролеум:



На другій стадії кризь нітролеум під тиском пропускають чистий кисень. Нітролеум реагує з киснем, утворюючи концентровану азотну кислоту з розчиненими оксидами азоту:



Мета статті – розробити оптимальну систему керування режимом пуску автоклава.

Математична модель. Швидкості описаних стадій [1]: $dc_1/dc = -k_1(T)c_1^2$ і $dc_2/dt = k_1(T)c_1^2 - k_2(T)c_2$, в яких константи k_1 і k_2 залежать від температури T за рівнянням Арреніуса: $k_1(T) = A_1 \exp(-E_1/R_1T)$, $k_2(T) = A_2 \exp(-E_2/R_2T)$; R_1, R_2 – газові сталі; E_1, E_2 – енергії активації.

Цільова функція поставленої задачі $I = 1/2 t_f^2 \rightarrow \min$ за обмежень $c_2(t_f) = c_2^{3\lambda}(t_f)$ і $T_1 \leq T \leq T_2$, де t_f – кінцевий момент часу; T_1, T_2 – мінімальне й максимальне значення температури, за якої відбувається реакція.

Задача має сенс, якщо енергія активації реакції утворення нітролеуму є меншою, ніж енергія активації реакції утворення концентрованої азотної кислоти.

Застосовано метод функції штрафів за градієнтного способу пошуку екстремуму в функціональному просторі для обчислення керування й траєкторії для переведення нелінійної системи зі стану $c_1(0) = c_{10}$, $c_2(0) = c_{20}$ у стан $c_2(t_f) = c_2^{3\lambda}(t_f)$ протягом мінімального часу. Цю задачу вирішують як задачу мінімальної функції вартості

$$I = 1/2 S_{22}[c_2(t_f) - c_2^{3\lambda}(t_f)]^2 + 1/2 t_f^2 \rightarrow \min.$$

Можна врахувати обмеження на дію керування, ввівши функцію штрафу

$$I = 1/2 S_{22}[c_2(t_f) - c_2^{3\lambda}(t_f)]^2 + 1/2 t_f^2 + 1/2 \int_0^{t_f} (T_2 - T)^2 H(q_1) + (T - T_1)^2 H(q_2) dt,$$

де H – функція Хевісайда, $q_1 = T_2 - T \geq 0$, $q_2 = T - T_1 \geq 0$.

Тоді $H = 1/2(T_2 - T)^2 H(q_1) + 1/2(T - T_1)^2 H(q_2) + \lambda_1[-k_1(T)c_1^2] + \lambda_2[k_1(T)c_1^2 + k_2(T)c_2]$, де $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ – множники Лагранжа.