

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ЗАСОБАМИ *MATLAB***

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з кредитного модуля “Статистичні методи–1
Теорія оцінювання та статистичні гіпотези” для студентів спеціальності
„Автоматизоване управління технологічними процесами”

Рекомендовано вченою радою інженерно – хімічноо факультету

Київ

НТУУ “КПІ”

2014

Дослідження законів розподілу ймовірностей випадкових величин засобами *Matlab*: Методичні вказівки до викон. лабор. робіт з кредитного модуля “Статистичні методи–1. Теорія оцінювання та статистичні гіпотези” для студ. спец. „Автоматизоване управління технологічними процесами”/ Уклад.: Л.Д. Ярощук. – К.:НТУУ “КПІ“, 2014. – 45 с.

Навчальне видання

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ЗАСОБАМИ *MATLAB***

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з кредитного модуля “Статистичні методи–1 Теорія оцінювання та статистичні гіпотези” для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами”

Укладач: к.т.н., доц. Ярощук Людмила Дем'янівна

Рецензент к.т.н.,
доц. каф. ХПСМ Щербина Валерій Юрійович

Розглянуто на засіданні кафедри АХВ Протокол №8 від 18.02.2014 р.

Зміст

Вступ.....	4
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. Дослідження законів розподілу випадкових величин.....	5
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. Створення та дослідження графічних зображень емпіричних законів розподілу ймовірностей.....	17
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. Дослідження оцінок параметрів законів розподілу випадкових величин.....	26
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	37
ДОДАТКИ.....	38
Додаток 1. Значення функції Лапласа.....	39
Додаток 2. Критичні значення для t – критерію (Стьюдента).....	41
Додаток 3. Критичні значення для χ^2 – критерію (Пірсона).....	44

ВСТУП

Сучасний етап розвитку науки і техніки характеризується значними змінами методів наукових експериментів, аналізу та узагальнення отриманих результатів - все суттєвішою стає роль статистичних методів. Математико-статистичні дослідження стають необхідним інструментом для отримання більш глибоких знань про механізми явищ, що виникають. В значній мірі це стосується тих систем, структурна та динамічна складність яких робить неефективним чи взагалі неможливим використання аналітичних методів дослідження.

При виконанні лабораторних робіт студенти знайомляться з методами визначення властивостей інформаційних потоків і створення математичних моделей об'єкта чи системи керування. Отримані моделі використовують в алгоритмах керування технологічними процесами для пошуку оптимальних режимів, прогнозування тощо.

Експериментально-статистичні методи широко застосовують завдяки значній кількості ефективних програмних продуктів, таких як *Statistica*, *MathCAD*, *MS Excel*, *MatLab* та ін. У [1] висвітлені можливості пакетів *MathCAD* та *MS Excel*.

У результаті виконання запропонованих лабораторних робіт студент оволодіває навичками використання статистичних функцій *MatLab* та *MS Excel*.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета роботи –дослідити вплив параметрів законів розподілу ймовірностей на функції розподілу й щільності розподілу та на діапазон значень відповідних випадкових величин за допомогою спеціалізованої комп'ютерної системи *MatLab*.

Теоретичні відомості

Законом розподілу випадкової величини є будь-яка форма відповідності між значеннями цієї величини та імовірностями появи цих значень. Закон розподілу може бути поданий як таблиця (табл.1.1) чи багатокутник розподілу (рис.1.1), а також за допомогою функцій розподілу ймовірностей $F(x)$ та щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Таблиця 1.1. Таблиця розподілу ймовірностей

X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_N
P	P_1	P_2	P_3	...	P_i	...	P_N

При упорядкуванні таблиці розподілу звичайно формують варіаційний ряд, тобто розташовують дані в порядку зростання. Таким чином, у наведеній таблиці дотримані співвідношення $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_i \leq x_N$.

Ряд розподілу можна описати і графічно. По осі абсцис відкладають значення випадкової величини, а по осі ординат - відповідні їм імовірності, точки з'єднують відрізками прямих ліній.

Отримана фігура називається *багатокутником розподілу*.

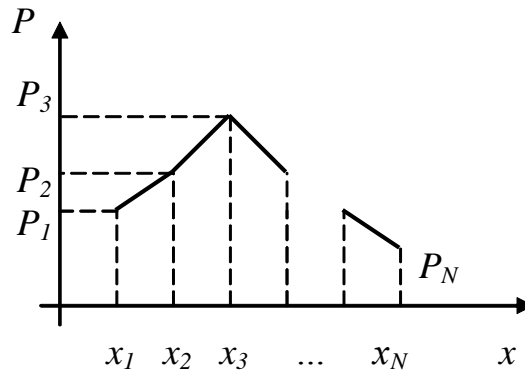


Рис.1.1. Багатокутник розподілу імовірностей величини X

Таблиця та багатокутник розподілу використовуються для випадкових дискретних величин.

Найбільш загальною формою подання закону розподілу неперервних і дискретних випадкових величин є функція розподілу.

Функція розподілу, $F(x)$ - це ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за задане дійсне число x, тобто

$$F(x) = P(X < x) .$$

Імовірність попадання випадкової величини в інтервал $[\alpha, \beta]$ дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Функцією щільності розподілу ймовірностей, $f(x)$ є перша похідна від інтегральної функції $F(x)$, тобто $f(x) = F'(x)$. Вона існує тільки для випадкових неперервних величин.

Розглянемо декілька найбільш поширених стандартних законів розподілу.

Для дискретних величин:

- **біномний**, він має місце тоді, коли проводиться N незалежних дослідів, кожен з яких закінчується або успіхом, або невдачею (тобто, може бути два результати, що виключають один одного). Імовірність успіху дорівнює P , а невдачі – $q=1-P$. Значенням x випадкової величини X в такому випадку є кількість успіхів у серії з N дослідів, тобто X може мати тільки цілі додатні значення від 0 до N : $X = [0, N]$. Імовірність появи конкретного значення $X = x$ визначається так:

$$P_N(x) = P(X = x) = C_N^x \cdot P^x \cdot q^{N-x};$$

де
$$C_N^x = \frac{N!}{x!(N-x)!} .$$

Функція розподілу цього закону наступна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \sum_{x_i \leq x} P_N(x_i), & \text{при } 0 < x \leq N; \\ 1, & \text{при } x > N; \end{cases}$$

- **пуассонівський**, цьому закону може підпорядковуватися випадкова величина, яка, як і в попередньому випадку, приймає цілі значення, а саме $X = [0, N]$, імовірність появи конкретного значення $X=x$ визначається так:

$$P_N(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}; \quad \lambda = N \cdot P.$$

Ця формула використовується тоді, коли N велике, а ймовірність появи події у окремому досліді (тобто P) незначна.

Для неперервних величин:

- **нормальний**, найбільш поширений серед величин, що характеризують технологічні процеси хімічної промисловості.

Функція щільності розподілу ймовірностей цього закону має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2};$$

де μ , σ - параметри розподілу, а саме математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;

- **рівномірний**, функція щільності наступна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; x > b; \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b; \end{cases}$$

де a , b – параметри розподілу, а саме - граничні точки інтервала існування випадкової величини;

- **експоненціальний (показниковий)** має таку функцію щільності розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

де λ - параметр розподілу.

MatLab має багату бібліотеку функцій роботи зі стандартними розподілами. Синтаксис кожної з них передбачає вживання на початку службового слова (ідентифікатора) для позначення закону розподілу, а наприкінці службового слова - позначення функції. Кожний розподіл може бути поданий трьома функціями – розподілу, щільності розподілу і функцією, оберненою до функції розподілу. Відповідно їхні позначення наступні: *cdf* – *cumulative distribution function*; *pdf* – *cumulative distribution function*; *inf* – *inverse cumulative distribution function*.

MatLab використовує 20 різних типів законів розподілу. У табл.1.2 наведемо позначення деяких з них.

Таблиця 1.2. Ідентифікатори законів розподілу

Назва закону	Ідентифікатор закону
Нормальний	<i>norm</i>
Рівномірний	<i>unif</i>
Експоненціальний	<i>exp</i>
Біномний	<i>binom</i>
Пуассона	<i>poiss</i>

Надамо приклади визначення і побудови графіків функцій $F(x)$ та $f(x)$.

Розглянемо операції з **біномним розподілом**.

Задамо значення випадкової величини (кількості успіхів), що змінюється від 0 до 20, та кількість дослідів – 20.

```
>> X=0:1:20;
>> N=20;
```

Задамо три значення параметру закону розподілу - ймовірності успіху у одному досліді та обчислюємо відповідні функції щільності для кожного

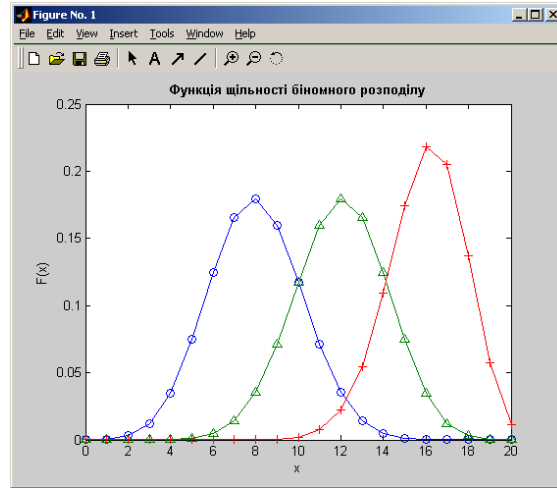
```
>> P1=0.4; P2=0.6; P3=0.8;
>> f1 = binopdf(X,N,P1);
>> f2 = binopdf(X,N,P2);
>> f3 = binopdf(X,N,P3);
```

% будуємо графіки цих функцій, задаючи стиль накреслення ліній

```
>> plot(X,f1,'-o',X,f2,'-^',X,f3,'-+');
```

% підписуємо графік та осі координат

```
>> title('\bfФункція щільності біномного розподілу');
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');
```



Обраховуємо суму імовірностей всіх значень випадкової величини X

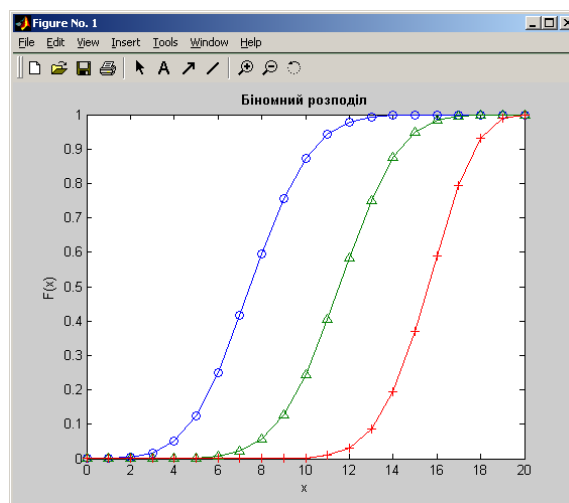
```
>> summa = sum(f1)
summa =
    1.0000
```

Визначимо **найбільше ймовірне значення випадкової величини X для $f1(x)$**

```
>> [max_prob, max_val] = max(f1)
max_prob =
    0.1797
max_val =
     9
```

Розрахуємо функції розподілу випадкової величини X .

```
>> f4 = binocdf(X,N,P1);
>> f5 = binocdf(X,N,P2);
>> f6 = binocdf(X,N,P3);
>> plot(X,f4,'-o',X,f5,'-^',X,f6,'-+');
>> title('\bfБіномний розподіл');
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');
```



Розрахуємо імовірність попадання значення випадкової величини у заданий інтервал [4,9].

```
>> f4(9)-f4(4)
ans =
    0.5796
```

Розглянемо операції з **нормальним розподілом**.

Задамо значення випадкової величини X та параметри закону розподілу — математичне сподівання та дисперсію.

```
>> X=-5:0.1:20;
>> MU1=1; MU2=2;
>> SIGMA1=0.1; SIGMA2=1;
```

Обчислимо функції щільності нормального розподілу

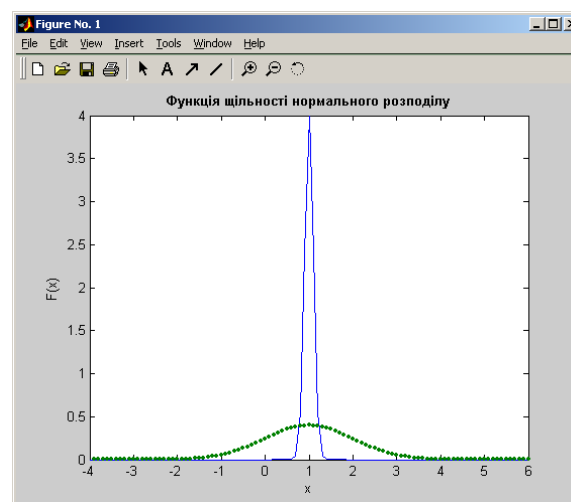
```
>> f1 = normpdf(X,MU1,SIGMA1);
>> f2 = normpdf(X,MU1,SIGMA2);
>> f3 = normpdf(X,MU1,SIGMA2);
>> f4 = normpdf(X,MU2,SIGMA2);
```

Побудуємо та оформлюємо графік, де зображені дві функції щільності з однаковим математичним сподіванням та різною дисперсією

```
>> plot(X,f1,X,f2,'. ');
>> title('\bfФункція щільності нормального розподілу');
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');
```

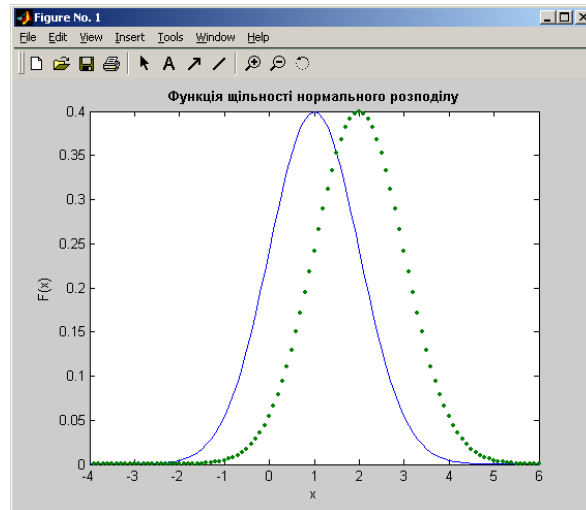
Встановимо межі графіка по осі X

```
xlim([-4 6]);
```



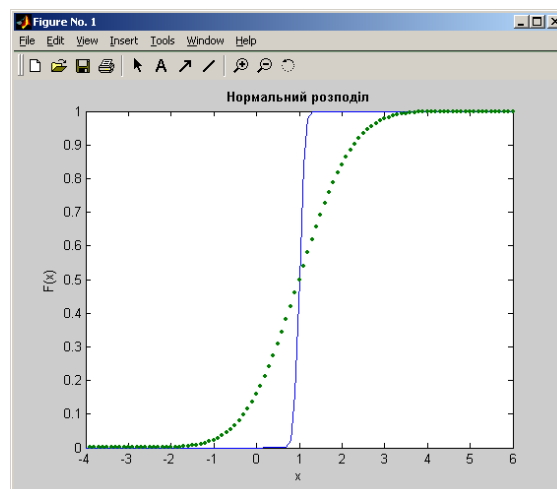
Побудуємо та оформимо графік, де зображені дві функції щільності з однаковою дисперсією та різним математичним сподіванням.

```
>> plot(X,f3,X,f4, '. ');  
>> title('\bfФункція щільності нормального розподілу');  
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');  
>> xlim([-4 6]);
```

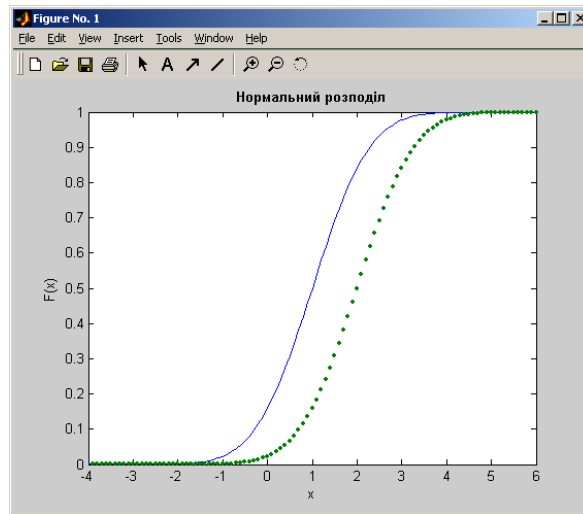


Розрахуємо функції розподілу випадкової величини X за даним законом.

```
>> f5 = normcdf(X,MU1,SIGMA1);  
>> f6 = normcdf(X,MU1,SIGMA2);  
>> f7 = normcdf(X,MU1,SIGMA2);  
>> f8 = normcdf(X,MU2,SIGMA2);  
>> plot(X,f5,X,f6, '. ');  
>> title('\bfНормальний розподіл');  
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');  
>> xlim([-4 6]);
```



```
>> plot(X,f7,X,f8, '. ');
>> title('\bfНормальний розподіл');
>> xlabel('x'), ylabel('F(x) ');
>> xlim([-4 6]);
```

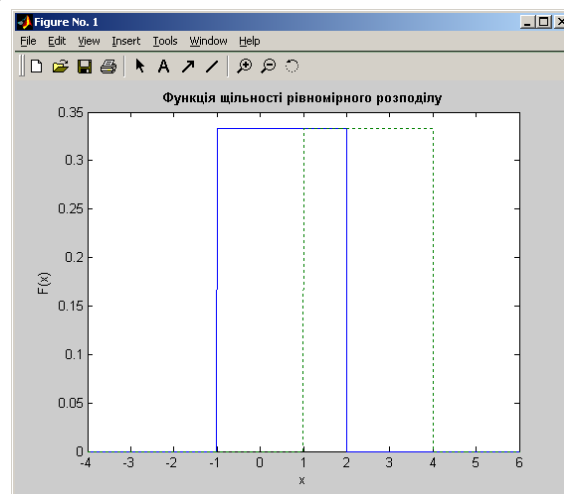


Розглянемо операції з **нормальним розподілом**. Задамо значення випадкової величини X та параметри закону розподілу — межі відрізка A і B .

```
>> X=-5:0.01:20;
>> A1=-1; A2=1;
>> B1=2; B2=4;
```

Побудуємо та оформлюємо графік, де зображені дві функції щільності з різними значеннями кінців відрізка.

```
>> f1 = unifpdf(X,A1,B1);
>> f2 = unifpdf(X,A2,B2);
>> plot(X,f1,X,f2, ':');
>> title('\bfФункція щільності рівномірного розподілу');
>> xlabel('x'), ylabel('F(x) ');
>> xlim([-4 6]);
```

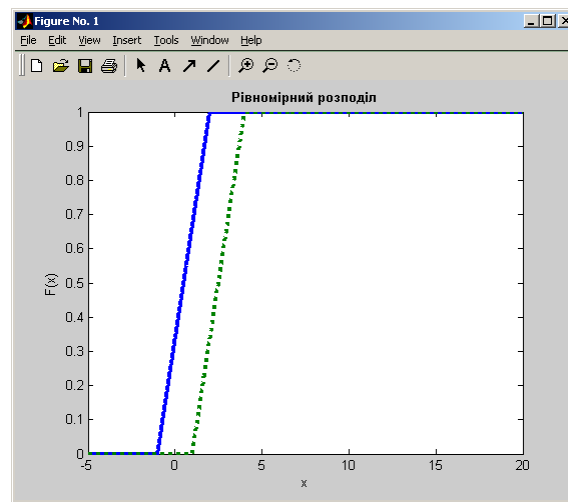


Розрахуємо функції розподілу випадкової величини X за даним законом.

```
>> f3 = unifcdf(X,A1,B1);  
>> f4 = unifcdf(X,A2,B2);  
>> graph=plot(X,f3,X,f4,':');
```

Збільшимо товщину ліній на графіку, додаємо заголовок та підписи осей координат

```
>> set(graph,'LineWidth',3)  
>> title('\bfРівномірний розподіл');  
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');
```

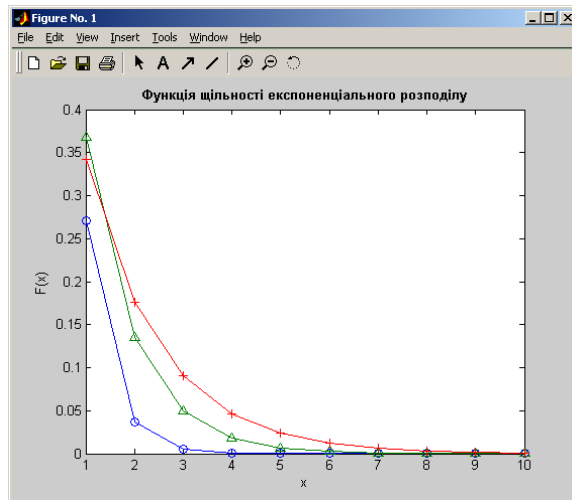


Розглянемо операції з **експоненціальним розподілом**. Задамо значення випадкової величини X при різних значення параметра закону розподілу — інтенсивності відмов.

```
>> X=1:1:10;  
>> MU1=0.5; MU2=1; MU3=1.5;
```

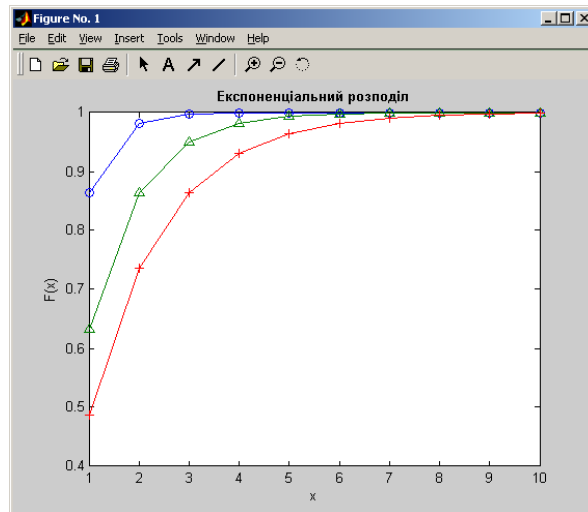
Побудуємо та оформимо графік, де зображені три функції щільності з різними значеннями параметра закону розподілу.

```
>> f1 = exppdf(X,MU1);  
>> f2 = exppdf(X,MU2);  
>> f3 = exppdf(X,MU3);  
>> plot(X,f1,'-o',X,f2,'-^',X,f3,'-+');  
>> title('\bfФункція щільності експоненціального розподілу');  
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');  
>> xlim([1 10]);
```



Розрахуємо функції розподілу випадкової величини X за даним законом.

```
>> f4 = expcdf(X,MU1);
>> f5 = expcdf(X,MU2);
>> f6 = expcdf(X,MU3);
>> plot(X,f4,'-o',X,f5,'-^',X,f6,'-+');
>> title('\bfЕкспоненціальний розподіл');
>> xlabel('x'), ylabel('F(x)');
```



Порядок виконання роботи:

1. Для дискретного біномного закону розподілу відтворити документи *MatLab*, наведені у тексті протоколу, зокрема, побудувати функції розподілу і щільності розподілу ймовірностей; перевірити, чи дорівнює одиниці сума ймовірностей всіх подій; визначити таке значення x_{max} випадкової величини X , для якого $P(X = x_{max})$ максимальна.

2. Для неперервних розподілів дослідити вплив їхніх параметрів на вигляд функції розподілу $F(x)$ та функції щільності розподілу $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$ та $f(x)$ вказаних законів розподілу при наступних співвідношеннях параметрів (далі $N_{бр}$ – номер бригади):

- **нормального** : а) $\mu = N_{бр}$; • $\sigma = 0,1\mu$
 - $\sigma = \mu$;
- б) $\sigma = 1$; • $\mu = N_{бр}$
 - $\mu = 2N_{бр}$;
- **рівномірного** : а) $a = -N_{бр}$; **$b = 2N_{бр}$** ;
- б) $a = N_{бр}$; **$b = 4N_{бр}$** ;
- **експоненціального**: а) $\lambda = 0,5N_{бр}$; б) $\lambda = N_{бр}$; в) $\lambda = 1,5 N_{бр}$.
-

Зміст звіту

Звіт повинен вміщувати назву лабораторної роботи, мету дослідження, значення параметрів вказаних вище законів розподілу та відповідні графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$, висновки.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке випадкова величина?
2. Що таке закон розподілу ймовірностей випадкової величини?
3. Які існують форми подання закон розподілу ймовірностей?
4. Наведіть приклади законів розподілу ймовірностей.
5. Назвіть параметри вищезазначених законів розподілу.
6. Які існують стандартні функції подання законів розподілу у *MatLab*?
7. Як пов'язані параметри законів розподілу з діапазоном значень випадкових величин?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

СТВОРЕННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЕМПІРИЧНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Мета роботи – дослідити вплив обсягів експериментальних даних на емпіричні закони розподілу ймовірностей випадкових величин.

Теоретичні відомості

Отримані в експерименті значення $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ випадкової величини X називаються варіантами (N - обсяг вибірки). Послідовність варіант, які записані у порядку зростання, формує так званий **варіаційний ряд**. Кількість спостережень, N_i кожного значення x_i називається **частотою**, а відношення:

$$W_i = N_i / N,$$

відносною частотою або частістю.

Наприклад, у результаті експериментальних досліджень отримана вибірка, що містить 50 варіант, які розподілені згідно з табл. 2.1. Треба визначити розподілення відносних частот.

Таблиця 2.1. Емпіричний розподіл величини X

X	5	8	14
N	10	15	25

Розв'язок. Обсяг вибірки становить: $N = \sum_{i=1}^3 N_i = 10 + 15 + 25 = 50$ варіант.

Відносні частоти для кожного значення X розраховують відповідно:

$$W_1=10/50=0,20; \quad W_2=15/50=0,30; \quad W_3=25/50=0,50; \quad W_1+W_2+W_3=1.$$

Емпіричним (статистичним) **розподілом** випадкової величини називається перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот, які спостерігались у вибірці експериментальних даних.

Емпіричний розподіл можна визначити також у вигляді послідовності інтервалів та суми частот, що опинилися в інтервалах. Для цього виконується групування даних спостережень у вигляді інтервального варіаційного ряду.

Використовуючи вибіркові дані, можна визначити емпіричну функцію розподілу, а також гістограму та полігон, які в певній мірі відображають функцію щільності розподілу. Позначимо через N_x кількість спостережень (варіант), при яких величини ознак (тобто значень X) були меншими за деяке x .

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, яка для кожного значення x визначає відносну частоту події " $X < x$ ":

$$F^*(x) = N_x / N.$$

Різниця між емпіричною $F^*(x)$ та теоретичною $F(x)$ функціями розподілу полягає в тому, що $F(x)$ визначає імовірність події " $X < x$ ", а $F^*(x)$ характеризує відносну частоту цієї події. Згідно з теоремою Бернуллі, у великій кількості дослідів відносна частота наближається до імовірності $F(x)$ цієї події. Емпірична функція $F^*(x)$ має ті ж самі властивості, що і теоретична функція $F(x)$.

Побудуємо для прикладу емпіричну функцію розподілу за наведеними вище вибірковими даними.

Найменша варіанта дорівнює 5, отже $F(5)=0$.

Значення $x < 8$, тобто $x=5$, мали місце 10 разів, тому можна записати

$F^*(8)=10/50=0,2$. Значення $x < 14$, а саме $x=5$ та $x=8$ спостерігались $10+15=25$ разів, отже $F^*(14)=25/50=0,5$. Оскільки значення $x=14$ є найбільшим у вибірці, то можна визначити, що при $x > 14$ отримуємо $F^*=1$.

Таким чином,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 5; \\ 0,2 & \text{при } 5 < x \leq 8; \\ 0,5 & \text{при } 8 < x \leq 14; \\ 1 & \text{при } x > 14. \end{cases}$$

Полігоном частот називають ламану лінію, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, N_1), (x_2, N_2), \dots, (x_k, N_k)$, де k – кількість різних варіант. Для побудови полігону частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i , а на осі ординат - відповідні частоти N_i , точки (x_i, N_i) з'єднують відрізками прямих ліній.

Полігоном відносних частот називають ламану лінію, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, W_1), (x_2, W_2), \dots, (x_k, W_k)$. Для побудови полігона відносних частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i , а на осі ординат - відповідні відносні частоти W_i .

Якщо результати вимірювань відносяться до неперервної випадкової величини X , то доцільно будувати гістограму.

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною Δ , а висоти дорівнюють відношенню N_i / Δ , яке називається щільністю частоти.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною Δ , а висоти дорівнюють W_i / Δ (щільність відносної частоти).

При побудові гістограми спочатку знаходять найменше і найбільше значення варіаційного ряду: x_{min} та x_{max} . Інтервал $[x_{min}, x_{max}]$, в якому містяться всі результати спостережень, розбивають на декілька часткових інтервалів, m довжиною Δ . Їх кількість визначається найчастіше за формулою Старджеса:

$$m = 1 + 3,322 \cdot \lg N;$$

отже довжину одиничного інтервалу визначають як

$$\Delta = (x_{max} - x_{min}) / (1 + 3,322 \cdot \lg N).$$

Початком першого інтервалу вважають величину $\delta_1 = x_{\min} - \Delta/2$, другого - $\delta_2 = \delta_1 + \Delta$, і-о - $\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta$. Інтервали визначаються доти, доки початок наступного інтервалу не перевищить x_{\max} . Для кожного і-о часткового інтервалу знаходять N_i - кількість експериментальних даних, які потрапили до нього, а потім розраховують і відкладають по осі ординат щільність частоти (або відносної частоти в залежності від типу гістограми). Якщо інтервали мають різну довжину, то слід розглядати окремі Δ_i .

Розглянемо спосіб розрахунку та побудови графіку *емпіричної функції розподілу ймовірностей* засобами *Mathlab*.

Задамо матрицю **A** з результатами експерименту

```
>> A = [1      3      5      7      9      % x
        0.1    0.15   0.3    0.33   0.12] % W
```

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу ймовірностей за цими даними. Для цього створимо у *m* - файлі функцію таким чином: через комбінацію клавіш *Ctrl + N* або команди меню “*File*” → “*New*” → “*m - file*” відкриваємо вікно редактора *m* – файлів і вводимо наступний текст:

```
for i = 1:length(x)
    if ((x(i) > -inf) & (x(i) < A(1,1)))
        y(i) = 0;
    end;
    if ((x(i) >= A(1,1)) & (x(i) < A(1,2)))
        y(i) = A(2,1);
    end;
    if ((x(i) >= A(1,2)) & (x(i) < A(1,3)))
        y(i) = A(2,1) + A(2,2);
    end;
    if ((x(i) >= A(1,3)) & (x(i) < A(1,4)))
        y(i) = A(2,1) + A(2,2) + A(2,3);
    end;
    if ((x(i) >= A(1,4)) & (x(i) < A(1,5)))
        y(i) = A(2,1) + A(2,2) + A(2,3) + A(2,4);
    end;
    if ((x(i) >= A(1,5)) & (x(i) < inf))
        y(i) = 1;
    end;
end;
```

У програмі використані такі ідентифікатори: f_0 - ім'я функції; y - значення, що повертається; x та A - вхідні аргументи; i – лічильник, значення якого змінюються від 1 до кількості елементів у векторі x зі стандартним кроком 1.

Збережемо створений m – файл в особистому каталозі з документами. Додамо шлях до даного каталогу до списку шляхів, за якими *MatLab* веде пошук m – файлів та інших зв'язаних файлів. Для цього використаємо нижченаведену функцію (або команду головного меню “*File*” → “*Set Path...*”):

```
>> addpath('шлях до каталогу зі створеним m-файлом')
```

Масив x , тобто перший рядок матриці A , визначимо як окрему змінну

```
>> x=A(1, :);
```

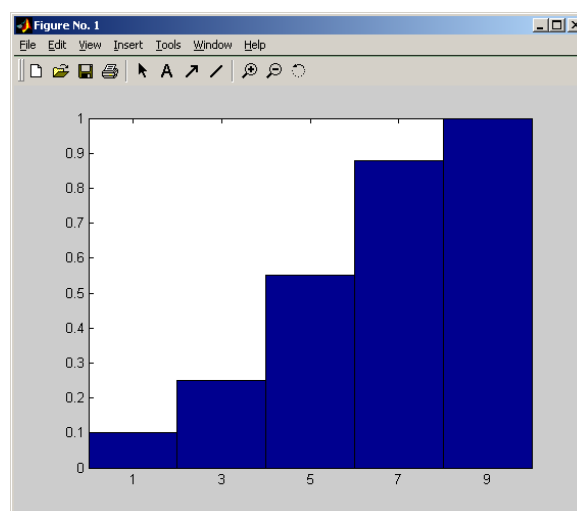
Нескінченність у системі *MatLab* позначають *inf*. Доступ до елементів матриці A здійснюється через задання номеру рядку та стовпчика у круглих дужках після імені матриці.

Виклик функції має здійснюватися наступним чином

```
>> f0(x, A)
```

Побудуємо графік створеної емпіричної функції розподілу ймовірностей, використовуючи дані з матриці A :

```
>> bar(x, f0(x, A), 1.0);
```



Побудуємо далі гістограми та полігони за даними, які будуть отримані в результаті генерування випадкових чисел (нормального, рівномірного та експоненціального розподілів).

MatLab має спеціальну функцію для побудови гістограм $hist(\delta, X)$. Результатом обчислень $hist(X, d)$ є вектор, кожний елемент якого дорівнює кількості вибіркового даних, значення яких належать відповідному інтервалу, тобто N_i . Параметр d – вектор, в якому зберігаються граничні точки інтервалів. Розмірність вектора $hist(X, d)$ співпадає з розмірністю вектора d і дорівнює кількості інтервалів.

Mahlab дозволяє генерувати випадкові величини, які підпорядковуються основним стандартним законам розподілу. Наведемо імена цих функцій для розглянутих законів: біномного $binornd(N, P, k)$ – повертає матрицю розмірністю $k \cdot k$ випадкових чисел (для виведення рядка з k чисел можна вжити синтаксис $binornd(N, P, 1, k)$ або $binornd(N, P, [1 \ k])$, для виведення стовпчика чисел вживемо синтаксис $binornd(N, P, k, 1)$ або $binornd(N, P, [k \ 1])$; пуассонівського $poissrnd(\lambda, k)$, експоненціального $exprnd(\lambda, k)$; нормального $normrnd(\mu, \sigma, k)$; рівномірного $unifrnd(a, b, k)$.

Розглянемо генерування випадкових чисел, підпорядкованих нормальному закону розподілу. Задамо наступні параметри: обсяг вибірки $N = 10$, математичне сподівання $\mu_x = 10$, середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = 1$.

```
>> N = 10;
>> mu = 10;
>> sigma = 1;
% Генерування вектора випадкових значень
>> X = normrnd (mu, sigma, N, 1);
```

Визначимо щільність відносної частоти попадання значень випадкових величин у деякі часткові інтервали.

Довжину одиничного інтервалу визначимо через ділення довжини всього інтервалу $[X_{\min} \ X_{\max}]$, в якому містяться всі результати спостережень, на кількість часткових інтервалів, яку визначаємо за формулою Старджеса ($m = 1 + 3.322 \cdot \log(N)$):

```
>> X_max = max(X)
>> X_min = min(X)
>> X = sort(X);
>> Rx = X_max - X_min
>> m = 1 + 3.322*log(N)
>> m = floor(m)
>> D = Rx/m
>> for j = 1:m + 2
>>   d(j) = X_min + (2*j - 3) * (D/2);
>> end;
```

Побудуємо графік функції, що визначає кількість експериментальних значень у кожному інтервалі. Подаємо його у вигляді гистограми і полігона.

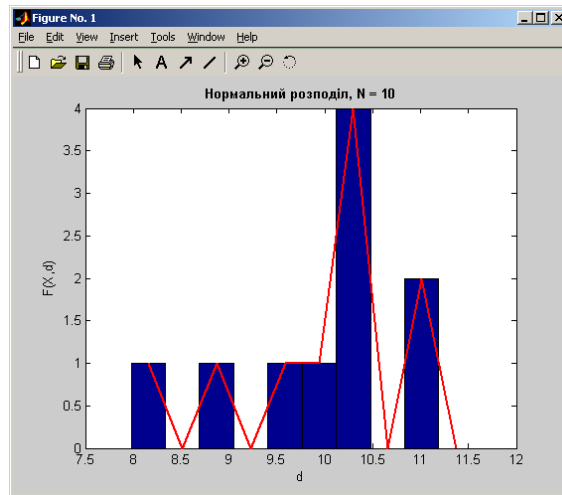
```
>> hist(X,d)
```

Після того, як гистограма побудована, задамо режим утримування зображення на графічному полі і будуємо на ньому полігон (колір ліній полігона – червоний).

```
>> hold on
>> graph = plot(d,hist(X,d),'r');
```

Оформимо побудоване зображення (задаємо товщину лінії полігону, назву графіка, мітки осей координат та вимикаємо утримування зображення)

```
>> set(graph,'LineWidth',2)
>> title('\bfНормальний розподіл, N = 10');
>> xlabel('d'), ylabel('F(X,d)');
>> hold off
```



Виконаємо очищення робочої області (видалення імен та значень всіх введених та розрахованих змінних) та звільнення системної пам'яті *MatLab*

```
>> clear
```

Порядок виконання роботи

1. За допомогою *MatLab* побудувати графік емпіричної функції розподілу ймовірностей для даних наведених у табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Результати експерименту

X	1	3	5	7	9
N	10	15	30	33	12

2. Побудувати гістограми та полігони за даними, які треба отримати в результаті генерування випадкових чисел (отримати вибірки для нормального, рівномірного та експоненціального розподілів).

Використати наступні параметри розподілів для генерування даних:

- **нормальний закон** : $\mu = 10N_{бр}$; $\sigma = N_{бр}$;
- **рівномірний розподіл**: $a = -N_{бр}$; $b = 5N_{бр}$;
- **експоненціальний**: $\lambda = 0,5N_{бр}$.

Для кожного з розподілів сформувати вибірки при $N=20$; $N=200$; $N=200000$.

Зміст звіту

Звіт повинен вміщувати назву лабораторної роботи, мету дослідження, тексти документів *MatLab* і графічні зображення результатів досліджень, висновки.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке емпіричний закон розподілу ймовірностей?
2. Як побудувати емпіричну функцію розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини?
3. Що таке полігон і гістограма частот (відносних частот)?
4. Як побудувати полігон та гістограму?
5. Як побудувати емпіричну функцію розподілу полігон та гістограму засобами *MatLab*?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

ДОСЛІДЖЕННЯ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета роботи – дослідити вплив обсягу вибірки та довірчої ймовірності на точкові та інтервальні оцінки параметрів законів розподілу випадкових величин.

Теоретичні відомості

Закони розподілу цілком характеризують випадкові величини із імовірнісної точки зору. Кожний із них визначається одним чи декількома параметрами. Знання цих параметрів дозволяє отримати математичний вираз для функції розподілу, тобто повністю описати цей закон. Маючи, однак, лише вибіркові дані, можна обчислити тільки оцінки параметрів. Якщо дослідник визначився із видом закону розподілу, то він знає, які саме параметри треба розраховувати. Оцінки бувають точковими та інтервальними.

Точковою називають таку статистичну оцінку параметра, яка визначається одним числом. Значення такої оцінки θ^* невідомого параметра θ теоретичного розподілу, розраховується як функція від випадкових величин, що спостерігаються: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$, ($x_i \in X$), у N незалежних дослідах.

Так, **нормальний закон**, якому відповідає наступна функція розподілу імовірностей випадкової величини X ,

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dz$$

має два параметри – математичне сподівання (μ_x) та дисперсію (σ_x^2).

Ці параметри є також найбільш поширеними числовими характеристиками випадкової величини з будь-яким законом розподілу ймовірностей.

Математичне сподівання визначає деяке середнє значення випадкової величини навкруг якого зосереджені всі імовірні її значення.

Незсуненою, обґрунтованою та ефективною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності, M_x є середнє арифметичне (M_a) результатів дослідження:

$$M_x = M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}. \quad (3.1)$$

Параметри позначають звичайно грецькими літерами, а їх оцінки – латинськими.

Крім M_a середні значення випадкової величини бувають таких видів:

- **середнє квадратичне:** $M_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N}};$ (3.2)

- **середнє геометричне:** $M_{\tilde{a}} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \dots x_N};$ (3.3)

- **середнє гармонічне:** $M_{\hat{\hat{a}}} = \frac{N}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_N}.$ (3.4)

Узагальнюючою формулою для $M_{\text{кв}}$, M_a , $M_{\text{гарм}}$ є така:

$$M = \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^k}{N} \right]^{1/k},$$

для $M_{\text{кв}}$: $k=2$; M_a : $k=1$; $M_{\text{Г}}$: $k=-1$.

Дисперсія σ_x^2 характеризує розсіювання випадкової величини навколо математичного сподівання. Її значення розраховують як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від математичного

сподівання:

$$\sigma_x^2 = \mu[X - \mu_x]^2.$$

Іноді використовують формулу

$$\sigma_x^2 = \mu_{x^2} - (\mu_x)^2.$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, тому часто вживають інший параметр - середнє квадратичне (стандартне) відхилення, σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

Обґрунтованою та незсуненою є наступна точкова оцінка **дисперсії**:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2}{N-1}. \quad (3.5)$$

Розглянемо інші поширені показники варіації:

розмах: $R = x_{\max} - x_{\min};$ (3.6)

де x_{\max} , x_{\min} – найбільше та найменше числа у вибірці;

середнє лінійне відхилення: $S_{\text{лин}} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - M_x|}{N-1};$ (3.7)

стандартне (середнє квадратичне) відхилення: $S_x = \sqrt{S_x^2};$ (3.8)

коефіцієнт варіації: $K_x = \frac{S_x}{M_x} 100\%.$ (3.9)

Для випадку, коли випадкова величина підпорядковується **рівномірному закону розподілу** і існує на інтервалі $[a, \beta]$, незсуненою та обґрунтованою є така оцінка β :

$$b = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (3.10)$$

Такими ж властивостями, але більш ефективною (тобто такою, що має меншу дисперсію) є наступна оцінка β :

$$b = \frac{N+1}{N} \max(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (3.11)$$

Нехай X – випадкова величина, яка підпорядковується **експоненціальному закону розподілу** і має наступну функцію щільності розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Як видно з наведеної системи, цей закон визначається параметром λ .

Цей параметр може бути оцінений за вибірковими даними так

$$\lambda = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{1}{M_x}.$$

Засоби статистичних розрахунків у базовій системі *MatLab* обмежені, для їх виконання використовують пакет розширення *Statistics Toolbox*. Коли він встановлений, то його команди доступні у вікні команд (*Command Window*). У табл. 3.1 наведено ті функції дескриптивної статистики, які стосуються оцінок параметрів, у табл. 3.2 – приклади їх використання.

Числові характеристики, які не мають відповідної вбудованої функції, як і в інших системах, у *MatLab* можна розрахувати за допомогою функцій користувача.

Точкові оцінки дають наближене значення параметру і самі є випадковими величинами. Їх дуже важко використовувати для прогнозування значень параметрів. Більш доцільно в останньому випадку вказувати діапазон, в якому може знаходитись значення параметру, тобто нижня і верхня границі його можливих значень: $M_x - \delta$, $M_x + \delta$.

Ці два числа і визначають так звану **інтервальну оцінку** параметра. Інтервальна оцінка визначається властивостями випадкової величини і заданою імовірністю знаходження оцінки у шуканому діапазоні. Діапазон значень, який має такі границі, називають довірчим інтервалом, а імовірність – **довірчою імовірністю** (P). Довжина діапазону дорівнює 2δ .

Табл. 3.1. Функції дескриптивної статистики *MatLab*

Назва параметру	Назва стандартної функції	Формула
1	2	3
Середнє арифметичне	<i>mean</i>	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
Середнє гармонічне	<i>harmmean</i>	$N(\sum_{i=1}^N 1/x_i)^{-1}$
Середнє геометричне	<i>geomean</i>	$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i}$
Дисперсія незсунена (виправлена)	<i>var</i>	$\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - M_x)^2$
Середнє квадратичне відхилення по незсуненій дисперсії	<i>std</i>	$\sqrt{\text{var}(x)}$
Розмах вибірки	<i>range</i>	$R = x_{\max} - x_{\min}$
Середнє лінійне відхилення	<i>mad</i>	$S_{lin} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i - M_x }{N}$

Таблиця 3.2. Приклади використання функцій дескриптивної статистики у системі *MatLab*

Команди та функції <i>MatLab</i>	Результат	Примітки
1	3	4
>> $x=[1\ 2\ 3\ 4\ 5];$ >> $M=mean(x)$	3	
>> $y=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ NaN];$ >> $My=mean(y)$	<i>NaN</i>	
>> $My=nanmean(y)$	3	
>> $y=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 15];$ >> $Mytr=trimmean(y,20)$	3.5000	
>> $Mhx=harmmean(x)$	2.1898	
>> $Mgx=geomean(x)$	2.6052	
>> $Mom=moment(x,2)$	2	Повертає дисперсію генеральної сукупності
>> $Disp=var(x)$	2.5000	
>> $CV=std(x)$	1.5811	
>> $CVy=nanstd(y)$	1.5811	
>> $Rx=range(x)$	4	
>> $y=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ NaN];$ >> $Ry=range(y)$	4	Команда <i>range</i> ігнорує нечислові значення
>> $Linx=mad(x)$	1.2000	
>> $Lminy=mad(y)$	1.2000	Команда <i>mad</i> ігнорує нечислові значення

Спосіб визначення довірчого інтервалу для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини залежить від того, чи відома заздалегідь її дисперсія. При відомій дисперсії і довірчій імовірності P довірчі границі розраховуються так:

$$M_x - \delta_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{N}}; M_x + \delta_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{N}},$$

де $\alpha=1-P$; δ_α - аргумент функції Лапласа $\Phi(\delta_\alpha)$, який визначається, виходячи з виразу

$$\Phi(\delta_\alpha) = P/2.$$

Параметр α називається рівнем значущості. Таблицю функції Лапласа наведено у табл.Д1 Додатку.

У тому разі, коли дисперсія апріорно не відома і можна розрахувати за вибірковими даними тільки її оцінку, довірчий діапазон визначають наступним чином

$$\left[M_x - t_{\alpha, N-1} \sqrt{\frac{S_x^2}{N}}; M_x + t_{\alpha, N-1} \sqrt{\frac{S_x^2}{N}} \right],$$

де $t_{\alpha, N-1}$ - табличне значення критерію Стюдента, при рівні значущості α та $N-1$ степенях вільності для двосторонньої критичної області.

При заданому α визначають довірчу імовірність, як $P=1-0,5\alpha$ и по ній – значення критерію Стюдента.

Довірчий інтервал для дисперсії нормально розподіленої випадкової величини при відомому значенні її математичного сподівання μ і заданій довірчій імовірності P визначають наступним чином

$$\left[\frac{NS^2}{A}, \frac{NS^2}{B} \right].$$

Параметри A та B знаходять як корені рівнянь

$$X_{N,\alpha}^2(A) = 0,5\alpha \text{ і } X_{N,\alpha}^2(B) = 1 - 0,5\alpha,$$

де $X_{N,\alpha}^2$ - функція X^2 (хі-квадрат) – розподілу з N степенями вільності і рівні значущості α .

Якщо математичне сподівання апріорно не відоме, то довірчий інтервал для дисперсії визначається так

$$\left[\frac{((N-1)S^2)}{A}, \frac{(N-1)S^2}{B} \right].$$

Параметри A та B знаходять як корені рівнянь

$$X_{N-1,\alpha}^2(A) = 0,5\alpha \text{ і } X_{N-1,\alpha}^2(B) = 1 - 0,5\alpha,$$

де $X_{N-1,\alpha}^2$ - функція X^2 – розподілу з $N-1$ степенями вільності і рівні значущості α .

У табл. 3.3 наведено функції *MatLab*, які використовують при інтервальному оцінюванні.

Таблиця 3.3. Параметри інтервальних оцінок для *MatLab*

Табличний параметр		Функція <i>MatLab</i>
Позначення	Назва	
b	Аргумент функції Лапласа	$norminv(1-\alpha/2,0,1)$, $norminv((1+P)/2,0,1)$
t_{tabl}	Критерій Стьюдента	$tinva(\alpha,N-1)$, $tinva(1-P,N-1)$
χ_2^2	Критерій Пірсона	$chi2inv(1-\alpha/2,N-1)$, $chi2inv((1+P)/2,N-1)$
χ_1^2		$chi2inv(\alpha/2,N-1)$, $chi2inv((1-P)/2,N-1)$

На рис. 3.1 наведено приклади використання параметрів табл. 3.3. З них видно, що результат розрахунку у *MatLab* позначено ідентифікатором *ans*.

```
>> norminv((1+0.95)/2,0,1)
ans =
    1.9600
>> tinva(0.05,19)
ans =
   -1.7291
>> tinva((1+0.950)/2,19)
ans =
    2.0930
>> chi2inv((1+0.960)/2,19)
ans =
   33.6874
```

Рис. 3.1. Документ *MatLab* з прикладами розрахунків параметрів табл. 3.3

На рис. 3.2 наведено документ *MatLab* із визначенням довірчого інтервалу для математичного сподівання.

```
Mw=Mx+tinvs((1+P)/2,N-1)*Sx/sqrt(N)
Mn=Mx-tinvs((1+P)/2,N-1)*Sx/sqrt(N)
di=Mw-Mn
```

Рис. 3.12. Документ *MatLab* із визначенням довірчого інтервалу для математичного сподівання

На рис. 3.3 наведено документ *MatLab* із визначенням довірчого інтервалу для дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкової величини.

```
P=0.98;S2x=10;N=20;
(Розрахунок нижньої межі для дисперсії)
S2n=S2x*N/chi2inv((1+P)/2,N-1)
Результат S2n = 5.5263
(Розрахунок верхньої межі для дисперсії)
S2w=S2x*N/chi2inv((1-P)/2,N-1)
Результат S2w = 26.2029
(Довірчий інтервал для дисперсії)
dS2=S2w-S2n
Результат dS2 = 20.6767
(Розрахунок верхньої межі для середнього квадратичного відхилення)
Sw=sqrt(S2w)
Результат Sw = 5.1189
(Розрахунок нижньої межі для середнього квадратичного відхилення)
Sn=sqrt(S2n)
Результат Sn = 2.3508
(Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення)
>> dS=Sw-Sn
Результат dS = 2.7681
```

Рис. 3.3. Документ *MatLab* із визначенням довірчого інтервалу для дисперсії та середнього квадратичного відхилення

Порядок виконання роботи

1. Використовуючи функції *MatLab*, генерувати вибірки обсягом $N=25$; $N=50$; $N=75$; $N=100$; $N=150$ наступних типів:

- **нормально розподілених випадкових величин** з такими параметрами:

$$\mu = N_{бр}, \sigma = 0,1N_{бр};$$

- **рівномірно розподілених випадкових величин** з параметром з діапазону $[0, \beta]$, $\beta = N_{бр}$;

- **випадкових величин**, які підпорядковуються **експоненціальному** закону розподілу з параметром $\lambda = N_{бр}$.

2. Для кожного N обчислити точкові оцінки параметрів вищеназваних законів розподілу, причому для рівномірного закону розподілу скористатися формулами (3.10) та (3.11).

3. Побудувати графіки, на яких зобразити дійсне значення параметру та залежність точкової оцінки від обсягу вибірки N .

4. Для п'яти вибірок нормально розподілених випадкових величин (див. п.1) розрахувати інтервальні оцінки математичного сподівання і дисперсії. Результати розрахунків занести у табл.3.2.

5. Побудувати графіки залежності довжини довірчих інтервалі

а) від обсягу вибірки N при вибраній довірчій імовірності ($P=0,95$);

б) від довірчої імовірності P при сталому обсязі вибірки ($N=50$).

6. Створити у *MS Excel* вибірку з 25 чисел, (використати дані, отримані за допомогою *MatLab* у п.1). Розрахувати параметри цієї вибірки за (3.1–3.9), які вказано у теоретичних відомостях даної лабораторної роботи.

Таблиця 3.4. Результати розрахунків числових характеристик

Обсяг вибірки, N	Довірча імовірність, P			
	0,99	0,95	0,90	0,75
25				
50				
75				
100				
150				

Зміст звіту

Звіт повинен вміщувати назву лабораторної роботи, мету дослідження, формули для розрахунку точкових та інтервальних оцінок математичного сподівання та дисперсії, таблицю та графіки, отримані у результаті виконання пп.5,6, висновки.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть формули для визначення різних типів середніх значень випадкових величин та показників варіації.
2. Перелічіть відомі закони розподілу ймовірностей і вкажіть їхні параметри.
3. Що таке оцінка параметру?
4. Що таке точкова оцінка параметру?
5. Що таке інтервальна оцінка параметру? Чим вона характеризується?
6. Які способи визначення параметрів надають *MS Excel* та *MatLab* ?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Основи дослідження об'єктів керування статистичними методами: Метод.вказівки до викон.лабор.робіт з курсу «Статистичні методи»/ Уклад. А.І. Жученко А.І., Л.Д. Ярощук.- К.:НТУУ «КПІ», 2006. – 48 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.:Высш.шк.,2001.-575 с.
3. Жученко А.І., Ярощук Л.Д. Оцінювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. теорія та практика роботи з *MathCAD*, *Matlab*, *MS Excel*: навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 154 с.
4. Дьяконов В. П. *MATLAB 6/6.1/6.5 + SIMULINK 4/5* в математике и моделировании. полное руководство пользователя, М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2003. – 576 с.
5. Блатнер П., Ульрих Л. Использование *MICROSOFT EXCEL 2000*. Специальное издание. – М.: Издательский дом “ВИЛЬЯМС”, 2000. – 1024 с.

ДОДАТКИ

Таблиця Д1. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

X	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4505
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4515
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599

Продовження табл.Д1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616
0.43	0.1664	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633
1.80	0.4641	2.00	0.4772	2.40	0.4918	2.80	0.4974
1.81	0.4649	2.02	0.4783	2.42	0.4922	2.82	0.4976
1.82	0.4656	2.04	0.4793	2.44	0.4927	2.84	0.4977
1.83	0.4664	2.06	0.4803	2.46	0.4931	2.86	0.4979
1.84	0.4671	2.08	0.4812	2.48	0.4934	2.88	0.4980
1.85	0.4678	2.10	0.4821	2.50	0.4938	2.90	0.4981
1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.52	0.4941	2.92	0.4982
1.87	0.4693	2.14	0.4838	2.51	0.4945	2.94	0.4984
1.88	0.4699	2.16	0.4846	2.56	0.4948	2.96	0.4985
1.89	0.4706	2.18	0.4854	2.58	0.4951	2.98	0.4986
1.90	0.4713	2.20	0.4861	2.60	0.4953	3.00	0.49865
1.91	0.4719	2.22	0.4868	2.62	0.4956	3.20	0.49931
1.92	0.4726	2.24	0.4875	2.64	0.4959	3.40	0.49966
1.93	0.4732	2.26	0.4881	2.66	0.4961	3.60	0.499841
1.94	0.4738	2.28	0.4887	2.68	0.4963	3.80	0.499928
1.95	0.4744	2.30	0.4893	2.70	0.4965	4.00	0.499968
1.96	0.4750	2.32	0.4898	2.72	0.4967	4.50	0.499997
1.97	0.4756	2.34	0.4904	2.74	0.4969	5.00	0.499997
1.98	0.4761	2.36	0.4909	2.76	0.4971		
1.99	0.4767	2.38	0.4913	2.78	0.4973		

Таблиця Д2. Критичні значення для t -критерію (Стьюдента)

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	1.679	2.014	2.412	2.69	3.281	3.520
46	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	1.677	2.010	2.405	2.68	3.265	3.500
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
51	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239	3.470
58	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
61	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229	3.457
62	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227	3.454
63	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225	3.452
64	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223	3.449
65	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220	3.447
66	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218	3.444
67	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216	3.442
68	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214	3.439
69	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213	3.437
70	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
71	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209	3.433
72	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207	3.431
73	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206	3.429
74	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204	3.427
75	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202	3.425
76	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201	3.423
77	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199	3.421
78	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198	3.420
79	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197	3.418
80	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
81	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194	3.415
82	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193	3.413
83	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191	3.412
84	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190	3.410
85	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189	3.409
86	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188	3.407
87	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187	3.406
88	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185	3.405
89	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184	3.403
90	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
91	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182	3.401
92	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181	3.399
93	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.394
98	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175	3.393
99	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.39
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Рівень значущості α (однобічна критична область)						

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
101	1.660	1.984	2.364	2.625	3.173	3.389
102	1.660	1.983	2.363	2.625	3.172	3.388
103	1.660	1.983	2.363	2.624	3.171	3.388
104	1.660	1.983	2.363	2.624	3.170	3.387
105	1.659	1.983	2.362	2.623	3.170	3.386
106	1.659	1.983	2.362	2.623	3.169	3.385
107	1.659	1.982	2.362	2.623	3.168	3.384
108	1.659	1.982	2.361	2.622	3.167	3.383
109	1.659	1.982	2.361	2.622	3.167	3.382
110	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
111	1.659	1.982	2.360	2.621	3.165	3.380
112	1.659	1.981	2.360	2.620	3.165	3.380
113	1.658	1.981	2.360	2.620	3.164	3.379
114	1.658	1.981	2.360	2.620	3.163	3.378
115	1.658	1.981	2.359	2.619	3.163	3.377
116	1.658	1.981	2.359	2.619	3.162	3.376
117	1.658	1.980	2.359	2.619	3.161	3.376
118	1.658	1.980	2.358	2.618	3.161	3.375
119	1.658	1.980	2.358	2.618	3.160	3.374
120	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
121	1.658	1.980	2.358	2.617	3.159	3.373
122	1.657	1.980	2.357	2.617	3.158	3.372
123	1.657	1.979	2.357	2.616	3.158	3.371
124	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.371
125	1.657	1.979	2.357	2.616	3.157	3.370
126	1.657	1.979	2.356	2.615	3.156	3.369
127	1.657	1.979	2.356	2.615	3.156	3.369
128	1.657	1.979	2.356	2.615	3.155	3.368
129	1.657	1.979	2.356	2.614	3.155	3.368
130	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
131	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.366
132	1.656	1.978	2.355	2.614	3.153	3.366
133	1.656	1.978	2.355	2.613	3.153	3.365
134	1.656	1.978	2.354	2.613	3.152	3.365
135	1.656	1.978	2.354	2.613	3.152	3.364
136	1.656	1.978	2.354	2.612	3.151	3.364
137	1.656	1.977	2.354	2.612	3.151	3.363
138	1.656	1.977	2.354	2.612	3.150	3.362
139	1.656	1.977	2.353	2.612	3.150	3.362
140	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
141	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
142	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.360
143	1.656	1.977	2.353	2.611	3.148	3.360
144	1.656	1.977	2.353	2.61	3.148	3.359
145	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.359
146	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.358
147	1.655	1.976	2.352	2.61	3.147	3.358
148	1.655	1.976	2.352	2.609	3.146	3.357
149	1.655	1.976	2.352	2.609	3.146	3.357
150	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Таблиця Д3. Критичні значення для χ^2 -критерію (Пірсона)

<i>k</i>	Імовірність, (%)								
	99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0
1	0,0393	0,0157	0,0393	0,0157	0,0982	0,0393	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0100	0,0200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527
9	0,972	1,153	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440
19	4,912	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266
21	5,896	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101
23	6,924	7,529	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943
25	7,991	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792
27	9,093	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647
29	10,227	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508
31	11,389	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440
32	11,979	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373
33	12,576	13,431	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307
34	13,179	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242
35	13,788	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115
37	15,020	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053
38	15,644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992
39	16,273	17,262	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,453	26,509	29,051	32,345	34,872

Продовження табл.Д3.

<i>k</i>	Імовірність, (%)											
	60,0	50,0	40,0	30,0	20,0	10,0	5,0	2,5	1,0	0,5	0,1	0,05
1	0,275	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116
2	1,022	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202
3	1,869	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730
4	2,753	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997
5	3,655	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105
6	4,570	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103
7	5,493	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018
8	6,423	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868
9	7,357	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666
10	8,295	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420
11	9,237	10,341	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136
12	10,182	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821
13	11,129	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478
14	12,079	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109
15	13,030	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719
16	13,983	15,338	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308
17	14,937	16,338	17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879
18	15,893	17,338	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434
19	16,850	18,338	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973
20	17,809	19,337	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498
21	18,768	20,337	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	49,010
22	19,729	21,337	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511
23	20,690	22,337	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728	52,000
24	21,652	23,337	26,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	51,179	53,479
25	22,616	24,337	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620	54,947
26	23,579	25,336	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407
27	24,544	26,336	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	57,858
28	25,509	27,336	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300
29	26,475	28,336	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301	60,735
30	27,442	29,336	31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,162
31	28,409	30,336	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098	63,582
32	29,376	31,336	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487	64,995
33	30,344	32,336	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870	66,402
34	31,313	33,336	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803
35	32,282	34,336	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619	69,199
36	33,252	35,336	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588
37	34,222	36,336	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892	62,882	69,346	71,972
38	35,192	37,335	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181	70,703	73,351
39	36,163	38,335	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055	74,725
40	37,174	39,335	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	76,095